TURING 图灵新知

Is God a Mathematician?

数学沉思录

古今数学思想的发展与演变

[美] Mario Livio 著
黄征 译



- 《华盛顿邮报》2009年最佳图书
- 鲍德斯书店2009年原创之声获奖图书



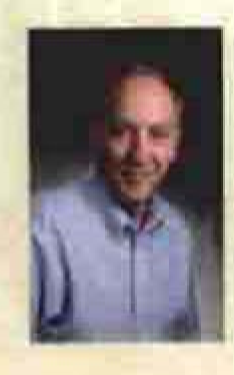
Is God a Mathematician?

数学沉思录

古今数学思想的发展与演变

博大精深的数学究竟是人类的发明还是发现？为什么它竟能描述宇宙万物的规律？是否真的有一位无所不能的上帝，他本身就是数学家呢？

蜚声世界的科普名家Mario Livio，回顾了千百年来人类所进行的深层次思考，试图从哲学角度阐释数学的本质，揭示数学与物质世界和人类思维之间的紧密联系。从信奉万物皆数的毕达哥拉斯、刀斧之下依然从容演算的阿基米德，到自制天文望远镜探索宇宙的近代科学始祖伽利略、坚持“我思故我在”的解析几何之父笛卡儿，再到极力反对柏拉图主义的现代数学家阿蒂亚，数学思想几经发展又已一脉相承。历史上这些伟大的科学家在各自领域的重要贡献、他们在数学发展史上的远见卓识，以及他们的智慧人生和传奇故事，绘成一幅幅五彩斑斓的历史画卷，自Livio的丹青妙笔下缓缓流露舒展。



Mario Livio　1945年出生于罗马尼亚，1950年定居以色列，耶路撒冷希伯莱大学本科毕业，魏兹曼科学院硕士，特拉维夫大学博士。多年来从事天体物理研究，1981年~1991年任以色列理工学院物理学教授，而后加入美国马里兰州巴尔的摩市的哈勃太空望远镜研究所，现任该所外展服务部门负责人。他所著的*The Golden Ratio*曾获国际毕达哥拉斯奖和佩亚诺奖，*The Equation That Couldn't Be Solved*和*The Accelerating Universe*等著作也都在《自然》、《经济学家》、《科学》等权威期刊上得到极高的评价。





ISBN 978-7-115-23204-5

定价：35.00元

图灵网站：www.turingbook.com　热线：(010)51095186
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com
有奖勘误：debug@turingbook.com
分类建议　计算机/科普读物/数学
人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn

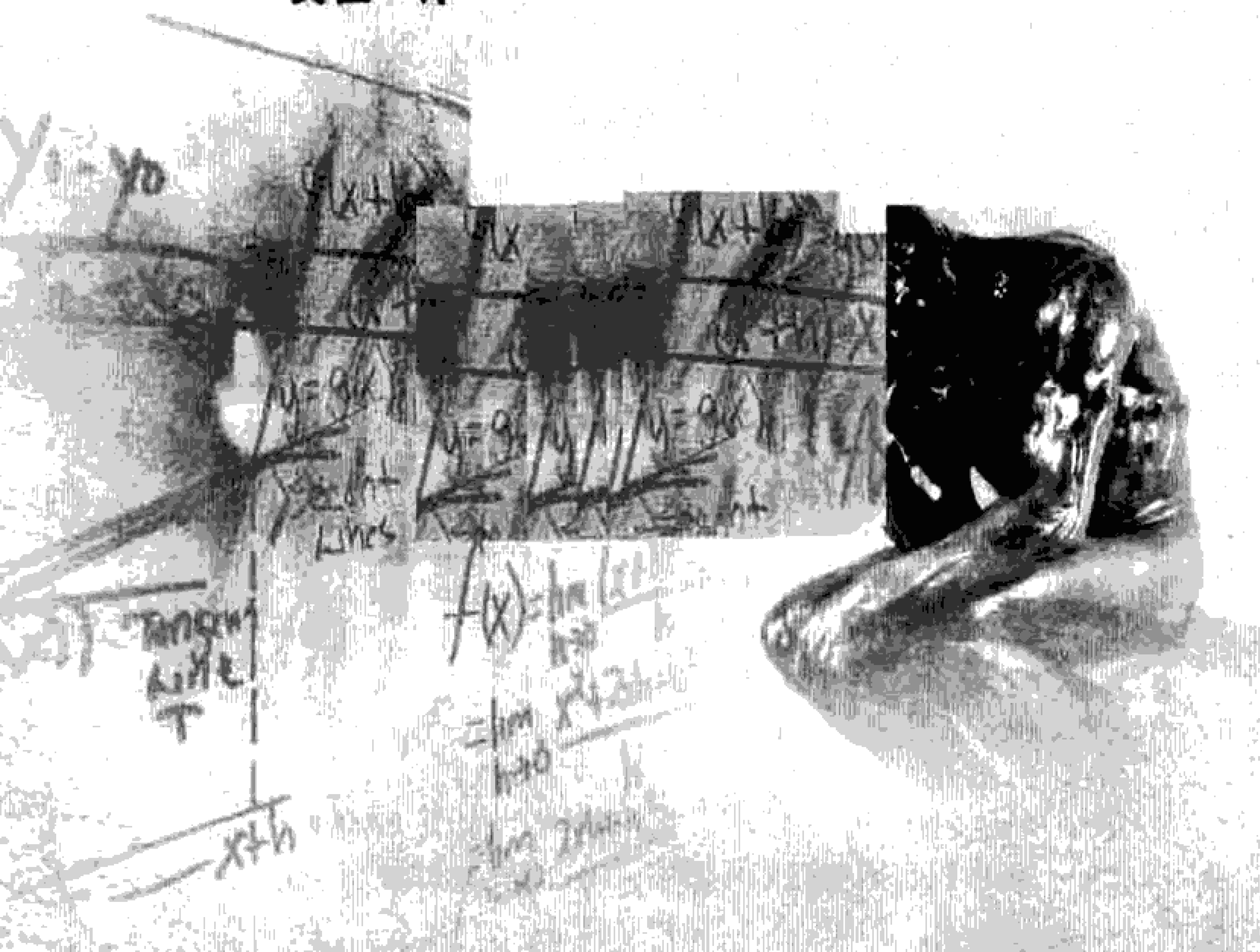
TURING 图灵新知

Is God a Mathematician?

数学沉思录

古今数学思想的发展与演变

[美] Mario Livio 著
黄征 译



人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

数学沉思录：古今数学思想的发展与演变 /（美）李维（Livio,M.）著；黄征译. -- 北京：人民邮电出版社，2010.8
（图灵新知）
书名原文：Is God a Mathematician?
ISBN 978-7-115-23204-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②黄… Ⅲ. ①数学史—世界—普及读物 Ⅳ. ①O11-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第122116号

内 容 提 要

数学无处不在，无所不能。它渗透在所有领域，能解释宇宙万物，完全超越了人类的能力。本书按照数学关键概念的演化过程来组织结构，引经据典地从哲学角度全方位阐释数学的本质，以及数学和我们的物质世界、人类思维之间的关系。其间，传奇的历史人物和神秘的古老传说让深奥的哲学论证趣味横生。

本书适合所有对数学感兴趣的读者阅读。

图灵新知

数学沉思录：古今数学思想的发展与演变

◆ 著　[美] Mario Livio
译　黄 征
责任编辑　傅志红
执行编辑　谢灵芝

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：9.5
字数：245千字　2010年8月第1版
印数：1－3 500册　2010年8月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2009-3807号

ISBN 978-7-115-23204-5

定价：35.00元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

译 者 序

毫无疑问，数学是复杂的，以致于有太多的数学家感叹道："数学是上帝书写宇宙的语言!"但是，毋庸置疑，数学又是重要的，现代科学发展的基石就是数学，甚至一门学科与数学联系的紧密程度可以代表该学科的发展水平。然而，即使在今天，对于究竟什么是数学这样一个看似简单的问题，我们仍然无法给出明确答案。数学王国是一个独立存在于宇宙之中，我们仅仅只能窥视一角的真实世界？如果是这样的话，数学家们所有的付出只是为了发现这个世界的奥秘。抑或数学是人类智慧与文明璀璨王冠上那颗最光彩夺目的明珠，数学的发展可以视为人类一种纯粹的思维上的智力活动？自从古希腊时代，这个问题使那些最优秀、最聪明的头脑困惑不已，包括毕达哥拉斯、柏拉图、阿基米德、伽利略、笛卡儿、牛顿、高斯、布尔、哥德尔……，每当我们自以为已经找到了答案时，就会有新的例子证明我们也许错了，唯一可以肯定的是，这个名单还会继续下去。

Mario Livio 本人是一位数学史学家，也是一位天体物理学家。在这本书里，他以一种非常宽广的历史视角，从数学与逻辑（人类思维）的联系等不同角度，深入研究了数学的本质、数学本身的发展、数学与哲学的关系。在这个探索与发现的旅途上，作者旁征博引，恣意纵横，通过大量的原始资料，让你可以在轻松的状态下了解到一个有声有色的数学世界，以及过去我们知之甚少的数学家的另外一面，最终，启发你得出自己的答案。正是作者深厚的学术素养、严谨的研究风格、活泼的写作方式，使得这本书在全美畅销书排行榜上占据了一席之地。

本书的写作切入角度非常独到，语言也十分活泼，本人在翻译过程中一直努力将作者的原意体现出来，但是由于水平所限，可能无法完全达到这一目的，诚为憾事。

黄征

2010 年 4 月 10 日

前　言

如果你从事的是宇宙学研究，那么每周都可能收到一些人的信件、电子邮件或传真，描述他们自己关于宇宙的理论（没错，这些人都是男性）。如果你礼节性地回信说自己想要了解更多的话，就会犯下大错：无穷无尽的信息将接踵而至，把你淹没。应当如何阻止这种“攻击”呢？根据我的经验，我发现了一个特别有效的招数（与根本不回信的粗鲁方式相比，这种方式可有礼貌多了），那就是告诉他们，如果该理论无法精确地用数学语言表达，就不可能评估它的意义。这种回应会令绝大多数业余宇宙论爱好者立刻停下脚步。事实也的确如此，如果没有数学，现代宇宙学家根本无法在理解自然法则方面有所进展，哪怕只是前进一小步。数学提供了能把任何关于宇宙的理论联系在一起的可靠的“脚手架”。这句话听上去可能不那么令人惊讶，那是因为你还没有意识到数学自身的本质在今天仍然不是完全清楚。正如英国哲学家迈克尔·达米特（Michael Dummett）爵士曾经指出的：“哲学和数学这两门最抽象的学科都引发出了同样的疑问：它们是关于什么的？”这种困惑不仅仅是出于无知，甚至数学家和哲学家们都发现很难给出确切的答案。

在本书中，我试图澄清两个方面的问题：数学的本质，以及数学和我们观察到的世界之间关系的本质。本书肯定不是一本包罗万象的数学史，而是按数学中的一些关键概念在历史上的演化过程来组织结构的，这些概念可以有效帮助我们认识数学在解释宇宙时的重要性。

长期以来，很多人都为本书写作提供了直接或间接的帮助，促成了书中很多观点的形成。我要感谢迈克尔·阿蒂亚（Michael Atiyah）爵士、

戈尔·德瓦利（Gia Dvali）、弗里曼·戴森（Freeman Dyson）、希勒尔·盖斯曼（Hillel Gauchman）、戴维·格罗斯（David Gross）、罗杰·彭罗斯爵士（Roger Penrose）、马丁·里斯勋爵（Martin Rees）、拉曼·桑卓姆（Raman Sundrum）、麦克斯·泰格马克（Max Tegmark）、史蒂文·温伯格（Steven Weinberg）、史蒂芬·沃尔夫拉姆（Stephen Wolfram）等人，与他们的交流使我获益良多。我要特别感谢多瑞斯·摩根斯坦·托马斯（Dorothy Morgenstern Thomas），他允许我使用奥斯卡·摩根斯坦（Oscar Morgenstern）关于库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）在美国移民归化局的经历的全部报道。我要感谢威廉·克里斯滕森-巴里（William Christens-Barry）、凯斯·诺里斯（Keith Knox）、罗杰·伊斯顿（Roger Easton），特别是威尔·诺埃尔（Will Noel），他们向我提供了破译阿基米德手稿的许多细节信息。还有劳拉·加尔博利诺（Laura Garbolino），他给了我一些十分重要同时也极为珍贵的数学史研究资料。我还要感谢约翰·霍普金斯大学、芝加哥大学和法国巴黎国家图书馆的收藏部门，他们找来的一批珍稀的手稿对我的写作帮助很大。

我非常感谢斯坦福纳·凯斯特纳（Stefano Casertano），他为我翻译了许多难以理解的拉丁文献。我还要对伊丽莎白·弗雷泽（Elizabeth Fraser）和吉尔·莱格斯都（Jill Lagerstrom）表达谢意，她们为我提供了极宝贵的目录索引和语言文字上的支持（她们永远都是面带微笑）。

特别感谢莎郎·图兰（Sharon Toolan），她为本书的付印提供了专业的帮助，还有安妮·菲尔德（Ann Feild）、克瑞丝塔·沃尔德（Krista Wildt）和史黛丝·班尼（Stacey Benn），他们帮我绘制了书中的部分图表。

每位作者可能都会认为自己十分幸运，能得到爱人持续的支持和理解，我也不例外。在本书写作的那段时间里，我的妻子苏菲亚（Sofie）以极大的耐心给予我源源不断的支持。

最后，我还要感谢我的经纪人苏珊·瑞宾奈尔（Susan Rabiner），没有她的鼓励，这本书也许永远不会出现。我还要向本书编辑鲍伯·班德（Bob Bender）表达深深的谢意，他仔细阅读了书稿，并给出了富有洞察力的评论。约翰娜·李（Johanna Li）也为本书出版给予了许多帮助。还有罗瑞塔·丹娜（Loretta Denner）和艾米·莱恩（Amy Ryan）在文字编辑方面，维多利亚·梅耶（Victoria Meyer）和凯蒂·葛林奇（Katie Grinch）在宣传方面都做了大量工作。此外，Simon & Schuster 公司的生产和市场营销团队也为本书面世付出了辛勤的汗水。

目　　录

第 1 章

神秘的数学

几年前，我在康奈尔大学发表演讲时，我的幻灯片中有一个标题是："上帝是数学家吗？"当这个标题刚投影出来时，我听到坐在前排的一个学生倒吸了一口凉气："天啊，我可不希望这样。"

这个一语惊人的问题，并不代表我打算从哲学上来定义上帝，也不是用来恐吓那些讨厌数学的人们的。事实上，我只是提出了一个谜，这个谜曾令那些最富有创新精神的先贤们苦苦思索了几个世纪：数学无处不在、无所不能。这些正是会让人们联想到神的特性。正如英国物理学家詹姆斯·琼斯[1]（James Jeans，1877—1946）曾指出的："宇宙似乎是由一位理论数学家设计的。"数学似乎不仅是描述和解释整个宇宙最有效的工具，而且可以用来解释最复杂的人类活动。

今天，无论是物理学家试图创立一种关于宇宙的新理论，股票市场分析员苦苦思索以预测下一轮股市暴跌，神经生物学家构建大脑功能模型，还是军事情报专家优化各种军事资源配置，他们都要使用数学。而且，即使他们在形式上发展出了数学的不同分支，在基础研究中他们依然需要求助于通用、一致的数学基本理论。是什么赋予数学如此令人难以置信的力量？或者，正如爱因斯坦[2]曾经惊叹的："数学，这个独立于人类经验存在的人类思维产物，怎么会如此完美地与物理现实中的物质相一致？"

这种困惑并非一件新鲜事。一些古希腊哲学家，特别是毕达哥斯拉

和柏拉图学派的，已经清晰认识到了数学在形成和支配宇宙方面所具有的能力，并对之怀有深深的敬畏之心。他们发现（数学的）这种能力似乎真实存在，而且超越了人类改变、引导和影响它的能力。英国政治哲学家托马斯·霍布斯（Thomas Hobbes，1588—1679）毫不掩饰他对此能力的崇敬之情。在他的《利维坦》（*Leviathan*）一书中，霍布斯关于社会和政府基础的阐述给人留下了深刻印象。他选择几何学作为理性论证的范例[3]。

> 可以看到，真理存在于把各种名称正确排序后所组成的断言中，因此，追求严谨真理的人需要记住他所使用的每个名称的含义，并把它们正确地排列好，否则就会发现自己绕在了文字表述中，就好像一只陷在椴树树枝中的小鸟，挣扎得越厉害，就越不能自拔。为此，在几何学中（这是迄今为止唯一令上帝满意并恩赐给人类的学问），人们首先确定名称的含义（这种含义称为“定义”），并且把它们作为认知的起点。

上千年来给人以深刻印象的数学研究和广博的哲学思考，都没有真正解释清楚数学力量的奥秘，甚至可以说，在某种意义上，数学的这种神秘感又加剧了。比如，著名的牛津数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose）意识到，人类周围并不是仅有 1 个世界，而应该有 3 个神秘世界。按彭罗斯的划分[4]，这 3 个世界是：意识感知的世界、物理现实的世界和数学形式的柏拉图世界。第一个世界是我们所有精神影像的家园，包括我们看到自己孩子笑脸时的欢欣愉悦、欣赏落日余晖壮美景色时的心旷神怡，或者观察怵目惊心的战争场面时的恐惧和憎恶。在这个世界中还包括爱、忌妒、偏见、害怕，以及我们欣赏音乐、闻到美食时的感觉。第二个世界就是我们日常所提到的物理现实世界，包括鲜花、阿斯匹林药片、白云、喷气式飞机，还有星系、行星、原子、狒狒的心脏、

人类的大脑，这些真实存在的东西构成了这个世界。第三个世界是数学形式的柏拉图世界，这里是数学的家园，对彭罗斯而言，和精神世界和物理世界一样，这个世界也是真实存在的。这里有自然数 1、2、3、4……，欧几里得几何学所有图形和定理、牛顿运动定律、弦论、突变论，以及研究股票市场行为的数学模型等。彭罗斯还观察到了这 3 个世界之间神秘相联的 3 种现象。首先，物理世界的运行似乎遵循着一定的法则，而这些法则真实存在于数学世界中。这也令爱因斯坦感到困惑。诺贝尔物理学奖得主尤金・维格纳（Eugene Wigner，1902—1995）也有同样的疑惑[5]：

> 数学语言适于表达物理法则，这种神奇是上天赐予我们的绝妙礼物。事实上我们并未真正理解这份礼物，同时也受之有愧。我们应当感谢这份礼物，希望在未来的研究中它仍然有效，而且继续扩展以拓展人类认识，无论这是好是坏，也无论这带给我们的是欢乐还是困惑。

其次，人类洞察性思维本身——我们主观认知能力的源泉——似乎来自于物理世界。思维究竟是如何从物质中产生的？我们是否能够将思维的工作机理上升为一种理论，如同今天的电磁场理论那样条理清晰、令人信服？最后，这 3 个世界神秘地联到一起，形成了一个闭合的圆。通过发现或创造抽象的数学公式和概念，并将它们清晰地表达出来，洞察性思维才得以奇迹般地进入数学王国之中。

彭罗斯并未给出任何关于这 3 个世界神秘现象的解释。实际上，他的结论非常简洁："毫无疑问，并不真正存在 3 个世界，而是只有 1 个世界。并且直到目前为止，对于这个真实世界的本质，我们对它的认识甚至连肤浅也谈不上。"与戏剧《四十年来》（*Forty Years On*，由英国作家艾伦・贝内特创作）中的那位教师回答类似的问题相比，彭罗斯的回答

可谓谦逊而坦白。下面即是那位教师的回答。

> **福斯特（Foster）**：先生，我仍然对（圣父、圣灵、圣子）三位一体的说法有点困惑。
>
> **教师**：三合为一，一分为三，非常直接，如果有任何疑问就去请教你的数学老师。

这个谜题甚至比我刚才提到的那个更错综复杂。利用数学成功解释我们周围的世界（维格纳称之为“数学无理由的有效性”），实际上可以从两个方面去认识，它们都同样令人惊奇。第一，是其“主动”的一面。当物理学家在自然的迷宫里迷失方向时，数学会为他们照亮前方的道路，他们使用和创造的工具、建立的模型，和他们所期望得到的解释，所有这些都离不开数学。显然，这本身就是一个奇迹。牛顿观察到落地的苹果、月亮、海滩上的潮汐（我不是很确信他是否真正看见了），不过他所看到的可都不是数学方程式。但是牛顿却从这些自然现象中抽象、总结出了清晰、简洁和精准的数学规律。同样，苏格兰物理学家麦克斯韦（1831—1879）在19世纪60年代拓展了经典物理学范畴。他仅仅使用4个数学公式，就解释了所有已知的电磁学现象。可以想象，电磁学和光学实验通常充斥着大量细节性信息，数据量十分巨大，以前都需要用大量篇幅才能归纳和解释所有这些现象和结论，但现在只需要4个简洁的方程式！爱因斯坦的广义相对论更使人惊叹，它是极度精确与自相一致的数学理论中的一个完美范例，这个理论所揭示的正是如时空结构一类的基础事物。

除了“主动”的一面外，数学神秘的效应中还包括“被动”的一面，它甚至令前者黯然失色，这可能让你十分惊讶。数学家研究探索数学概念以及各种概念之间的关系时，有时仅仅是出于理论研究的目的，绝对没有考虑过理论的实用性问题。但是在几十年后（有时甚至是几百年后）

人们突然发现，他们的理论出人意料地为物理现实问题提供了解决方案。你可能要问这怎么可能呢？那位行为古怪的英国数学家戈弗雷·哈罗德·哈代（Godfrey Harold Hardy，1877—1947）的例子就十分有趣。哈代为他的纯理论数学研究感到非常自豪，他曾断然宣称[6]："我的发现没有一项已经或者将要给世界带来丝毫影响，无论这种影响是直接的还是间接的，有益的抑或有害的。"猜猜结果如何？他错了！他的一项研究成果被命名为哈代-温伯格定律[7]，这是以哈代和德国物理学家威廉·温伯格（Wilhelm Weinberg，1862—1937）的名字命名的，该定律是遗传学家研究人口进化的基础。简单地说，哈代-温伯格定律认为：如果一个基数很大的人口群体随机婚配（没有人口迁移、基因突变和选择性婚配），基因构成将保持恒定，而且不因世代变化而变化。表面上，哈代研究的是抽象的数论——一门研究自然数的学科，却出乎意料地被发现能解决现实问题。1973 年，英国数学家克利福德·柯克斯[8]（Clifford Cocks）利用数论在密码学领域取得了突破性进展。柯克斯的研究成果再次证明了哈代言论的过时。哈代在他 1940 年出版的那本著名的著作《一个数学家的自白》（*A Mathematician's Apology*）中声称："任何人都不可能把数论用于战争。"很明显，他又错了！密码学在现代军事信息传递中绝对不可或缺。因此，即使哈代这位最有名的实用数学批判论者也被"拽入"研究具有实用价值的数学理论（如果他还在世的话，一定会对此高声抱怨）。

这还只是冰山一角。开普勒和牛顿发现了太阳系行星运行轨道是椭圆形的，而古希腊数学家门奈赫莫斯（Menaechmus，大约公元前 350 年）两千年前就已经研究过这个曲线了。乔治·弗里德里希·伯恩哈特·黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866）在 1854 年的一次经典演讲中概括了几门新兴几何学的主要内容，它们恰好是爱因斯坦解释宇宙结构时所必需的工具。还有一门叫群论（group theory）的数学"语言"，它是由年轻的数学天才伽罗瓦（Evariste Galois，1811—1832）所创

建的。起初仅仅用来判别代数方程式的可解性，但今天它已经被物理学家、工程师、语言学家甚至人类生态学家们广泛使用，以研究几乎所有的对称性问题[9]。此外，数学上对称的概念在某种程度上还颠覆了整个科学研究过程。几个世纪以来，科学家认识宇宙的第一步，都是在反复试验和观察后，收集汇总数据和结果，再从其中归纳出通用的自然规律。这种梳理过程从局部观察开始，之后像拼拼图一样一块块地拼起来。进入 20 世纪后，人们认识到条理清晰的数学设计描述了亚原子世界的基础结构，当代物理学家们开始反其道而行之①。他们把数学对称性置于第一位，坚持认为自然法则和构成事物的基本要素应当遵循某种特定模式，于是根据这种要求，他们推演出通用规律。自然界又是如何知道应当遵循数学上的对称原理呢？

在 1975 年的某天，年轻的数学物理学家米奇·费根鲍姆（Mitch Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯国家实验室利用他的 HP-65 便携式计算器演算一个简单的方程式。他渐渐注意到计算器上的数[10]越来越接近一个特定的数字：4.669…。他惊奇地发现，在他演算其他方程式时，这个神奇的数字再次出现了。虽然费根鲍姆还不能解释其原因，但他很快就得出结论，他所发现的这个数字似乎标志着从有序到混沌过渡时的某种普遍性规律。对此，你大可不必惊讶，物理学家们在刚开始时都是怀疑论者。究竟什么原因导致那些看起来差异极大的系统行为背后却有相同的数学特征呢？经过半年的专家评审，费根鲍姆就此专题撰写的第一篇论文被退稿了。不久之后，实验证明当液态氦从下面开始加热时，其变化过程同费根鲍姆通用解决方案预测的结果恰恰一样。人们发现不仅这一种体系会如此表现。费根鲍姆发现的这个令人惊讶的数字，不但出现在流体从有序流向紊乱的转换过程中，也会出现在水龙头滴水的过程中。

---

① 指不必像过去一样先观察现象再总结规律。——译者注

这种首先在数学上“预言”规律存在的必要性，尔后才被后人证实其的确存在的例子还有很多，并且仍然在上演。数学世界和真实（物理）世界之间那种神秘的、意想不到的相互影响，在纽结理论（这是一门研究绳结的学科）中得到了生动体现。数学上的“纽结”与现实中绳索上的结十分类似，只不过这根绳索的头与尾必须拼接在一起。也就是说，数学上的纽结是在一条闭合的、没有自由活动绳端的曲线之上。说来奇怪，创建纽结理论的主要起因是 19 世纪发展起来的一种错误的原子结构模型。这个模型在提出 20 年后就被证明是错误的了，但是纽结理论作为一门相对难以理解的理论数学分支，却在不断发展演化。出人意料的是，数学家在纽结理论领域所做的那些抽象的探索，突然间在现代科学研究中有了十分广泛的应用。其应用范围涵盖 DNA 分子结构、弦论，等等（弦论试图将亚原子世界和重力世界[①]统一起来）。我们将在第 8 章详细讨论这个不同寻常的故事，因为这段循环的历史也许是一个最好的例证，它充分说明了数学各分支是如何在人类试图解释物理现象的过程中产生的，以及随后如何进入数学的抽象王国，并在其中发展，最终又如何出人意料地回到了起点[②]。

发现还是发明

到目前为止，所有这些简短的叙述都充分证明，我们所处的世界受数学支配，至少其认识分析过程深受数学影响。正如本书将要提出的，大多数（也许是全部）人类活动似乎都源自于数学，对此，人类自己甚至根本都没有意识到。让我们再用一个金融领域的例子来证明——布莱

① 这两种理论在表面上完全不同，但由于它们本质上都是场理论，弦论认为世界是由更细小的弦组成，从纽结理论的观点看，可以把它们都当做位于三维空间上的弦，所以可以放在一起研究。——译者注

② 意思是在物理世界得到证实和应用。——译者注

克–斯科尔斯（Black–Scholes）期权定价模型[11]（1973）。布莱克–斯科尔斯期权定价模型为其发现者赢得了诺贝尔经济学奖[授予了迈伦·斯科尔斯（Myron Scholes）和罗伯特·卡哈特·默顿（Robert Carhart Merton），费歇尔·布莱克（Fischer Black）在获奖前就已经去世了]。该模型中的关键平衡等式能帮助我们理解如何确定股票期权价格（期权是一种金融工具，投资者以此共同商定未来某个特定日期股票的价格，并以此价格买入或卖出股票）。令人难以置信的是，该模型的核心问题，布朗运动已经被物理学家研究了几十年了。布朗运动描述了微粒的不规则、无休止的运动状态，它可以通过水中悬浮的花粉粒子和空气中烟尘粒子的运动观察到。同样的方程式也可以在星团里无数个星体运动中观察到。这是不是有点像《爱丽丝梦游仙境》（*Alice In Wonderland*）中所说的“神奇啊，太神奇了”？不管宇宙如何运行，毕竟商业和经济显然是人类思维所主导创造的世界。

让我们再来看一个在电路板制造或计算机设计中常见的问题。这些领域里，都可能要利用激光在平板上钻出数以万计的小孔。为了节约成本，设计人员不希望钻孔行为是一种随机行为，就像“随意游客”。他们希望能在钻孔前找出最短的“路径”，每个孔都将被“光顾”到，且只“光顾”一次。其实，从上个世纪20年代起，数学家们就开始研究这个“旅行商问题”了。简单地说，所谓“旅行商问题”，就是假设有一位商人，或者是一位参加竞选的参选人，想要以一种最经济的方式访问给定数量的所有城市，其中任意两座城市之间旅行的花费是已知的。他的问题就是找出一条能将所有城市都访问完、并且最后要回到原始出发点的、最便宜的那条路线。1954年，美国人给出了49个城市的“旅行商问题”解决方案，2004年瑞典人给出了24 978个城市的解决方案[12]。今天，电子工业、物流公司发送包裹，甚至日本弹珠盘游戏机（与弹珠类似，需要击打数千次手指）制造都可以最终简化为这个数学问题，并且其效率提

高都依赖于这个问题的答案。

数学还进入了一些传统上与之联系并不十分紧密的学科领域。例如，有本期刊叫《数理社会学杂志》(2006 年出版了第 30 卷)。其所谓的数理社会学，是通过数学工具来研究和分析复杂的社会结构、组织和非正式群体。该杂志所发表的文章主题涵盖很广，包括预测公众观点的数学模型、预测社会群体中某些交互行为的数学模型，等等。

让我们换个方向，把目光从数学转向人文学科，来看看计算语言学。这门学科起初只涉及计算机科学家，但今天它已经发展为一门跨学科的研究领域，它把语言学家、认知心理学家、逻辑学家以及人工智能专家集中在一起，共同研究自然进化语言的复杂性。

这难道是捉弄我们的恶作剧吗？人类所有试图领会和理解世界奥秘的努力，最终却带领我们发现了越来越精细复杂的数学领域，而这些领域正是宇宙，甚至人类所有行为的基础。难道数学就是教育工作者所谓的秘籍吗？（为了防止“教会徒弟，饿死师傅”，老师通常会把书上的知识藏起来一部分不教给学生，这样老师就总显得比学生高明。）或者，借用圣经上的一个隐喻：数学是智慧之树结出的最终果实吗？

正如我在本章开始部分所介绍的，数学无理由的有效性产生了许多有趣的问题：数学是一种完全独立于人类思维的存在吗？换句话说，就像天文学家们发现先前未被人类所观察到的星系那样，我们是否只是发现了本已存在的数学真理？若不是，难道数学只是人类的发明？如果数学真实存在于某个抽象的世界中，那么这个神秘的世界与物理现实世界之间是什么关系呢？只拥有有限知识的人类如何才能超越时空限制进入这个永恒不变的神秘殿堂？另一方面，假如数学仅仅是人类的发明，并且只存在于人类意识中，那么我们又如何解释，发明出来的这么多数学真理怎么会如神迹般地准确预言了几十年后，甚至是几百年之后才出现的宇宙和人类生活中的某些问题呢？这些问题并不像表面上看到的那么

简单。正如我在书中反复讲到的，即使在今天，数学家、认知学家、哲学家们对此还存在分歧。1989 年，法国数学家阿兰·孔涅（Alain Connes，他赢得了数学界最有名望的两项荣誉：1982 年的菲尔兹奖和 2001 年的克拉夫奖）曾很清晰地表达了他的观点[13]。

> 根据我的观察，质数（仅能被 1 和自己整除的数）组成的世界，远比我们周围的物质世界稳定。数学家的工作可以与探险家发现世界相媲美。他们都是从经历中发现基本事实。举例来说，通过简单的计算，我们发现质数的序列似乎永无穷尽。那么，数学家的任务就是证明存在无穷多的质数，当然这是欧几里得提出的一个古老结论。这个论证中最有趣的一个推论就是，如果某一天有人宣称他发现了最大的质数，很容易就能证明他是错的。对任何其他论证来说同样如此。由此可见，我们面对的数学如物理现实一样无可争议。

著名的多产数学科普作家马丁·加德纳（Martin Gardner）支持“数学是一种发现”的观点。对他来说，无论人类认识与否，数字及数学都是独立于人类认知存在的，这一点毫无疑问。他曾风趣地评论[14]：“如果森林中有两只恐龙与另外两只恐龙相遇，不管周围是否有人类在观察，那儿都会有 4 只恐龙。但是愚蠢的熊却不会知道。”正如孔涅强调的，“数学是一种发现”的观点（这也是柏拉图的看法）的支持者认为，一旦人们理解了某个数学概念，如自然数 1, 2, 3, 4…，那么就会面临一些无可争议的事实，如 $3^2+4^2=5^2$，这与人们如何看待它们之间的联系无关。这至少给我们留下一种印象，我们接触的是已经存在的真实世界。

当然，不是所有人都这么认为。在为孔涅的一本书（在该书中，孔涅表达了他的上述观点）撰写评论文章时，英国数学家迈克尔·阿蒂亚爵士（他在 1966 年获得了菲尔兹奖，2004 年获得阿贝尔奖）写道：

> 每一位数学家都会支持孔涅。我们都感到整数、圆在某种抽象意义上是真实存在的，并且柏拉图的观点（我在本书第 2 章会详细讨论）十分有吸引力。但是我们真的能支持它吗？假如宇宙是一维空间的话，或者甚至是离散的，很难想象几何学在这个一维空间中是如何孕育发展的。对人类来说，我们对整数似乎更在行，并且计数是真正原始的概念。但是想象一下，如果文明不是出现在人类中，而是出现在太平洋深处，出现在独居并与世隔绝的水母中，情况又会如何？水母不会有个体的体验，只会感觉到周围的水。运动、温度和压力将给它提供基本感知经验。在这样的环境中不会出现离散的概念，也不需要计数。

由于阿蒂亚确信[15]："通过理想化和抽象物理世界中的那些基本要素，人类创造了数学。"语言学家乔治·莱考夫（George Lakoff）和物理学家拉斐尔·努涅斯（Rafael Núñez）也持同样的观点。在他们合著的《数学从哪里来》（*Where Mathematics Comes From*）一书中，他们总结道："数学是人类天性的一部分，它源于我们的身体、大脑以及我们在这个世界中每天的经历。"

阿蒂亚、莱考夫和努涅斯的观点又引出了另一个有趣的问题：如果数学完全是人类发明的话，它真的具有普遍性吗？想象一下，如果外星文明真的存在的话，它们是否也会发明出与我们相同的数学呢？卡尔·萨根（Carl Sagan，1934—1996）过去认为答案是肯定的。在他的《宇宙》（*Cosmos*）一书中，当探讨智能文明会将哪种讯息传播到外空间时，他提出："任何自然的物理进程都不可能在传播无线信息时只包括质数。假设接收到这样的信息，我们就能推断出那里存在至少喜欢质数的文明。"但这如何确定呢？在新书《一门新科学》（*A New Kind of Science*）中，数学物理学家史蒂芬·沃尔夫拉姆（Stephen Wolfram）认

为这种称为“人类的数学”的智慧，也许仅代表从数学之树上开放的、众多不同的“花朵”中的一朵。例如，如果不使用基于数学公式的法则来描述自然的话，人类也可以使用其他不同类型的法则（比如，在简单的计算机程序中所体现的法则）。另外，一些宇宙学家们最近已经开始讨论我们身处的宇宙可能是多元宇宙（众多宇宙的集合体）的一个组成部分。如果这种多元宇宙真实存在的话，其他宇宙空间中所发展出的数学与我们的数学一致吗？

有一些分子生物学家和认知学家基于大脑功能的研究提出了另外一种观点：数学同语言区别不大。换句话说，基于这种“认知”，人类在注意自己的双手、双眼、两胸无数世代后，数字“2”的抽象定义慢慢形成。同样，“鸟”这个字的概念也是这样形成的——人们逐渐认识到这个字代表有两只翅膀、并且能够飞起来的动物。正如法国神经系统学家让皮埃尔·尚热（Jean-Pierre Changeux）所说的[16]：“对我而言，公理法（例如欧几里得几何学就是建立在几条公理之上的）就是与使用大脑相关联的理性能力的表现。”但是，如果数学算另外一种语言的话，我们又如何解释孩子们在学习语言时会相对比较轻松，但其中相当一部分在学习数学时却倍感吃力呢？苏格兰天才儿童马乔里·弗莱明（Marjory Fleming，1803—1811）就用一种极为无奈的语气描述了她在面对数学时的那种痛苦。弗莱明不到 9 岁就夭折了，在她的日记中留下 9 000 多字的散文和 500 多行的诗歌。在一篇日记中她曾抱怨道[17]：“我要告诉你的是乘法表带给了我无尽痛苦和烦恼，你可能难以想象。最难对付的就是 8 乘 8 和 7 乘 7，这真是让人无法忍受。”

这个问题很难回答。如果考虑其他一些因素的话，它可能就会转变成另一个问题：与其他表现人类思维的方式（如美术和音乐）相比，数学和它们有什么本质不同？如果没有什么本质不同的话，那么，为什么数学会表现出一种不可思议的逻辑性和自相一致性，而这些特征是其他

任何一种人类创造都不具备的？以欧几里得几何学为例，虽然它是在公元前 300 年创立的，但直到目前，它依然是正确的（当然要看它的应用领域），它表达的某些“真理”现在仍然被遵守。相比之下，今天我们既无法强迫现代人喜欢古希腊人所听的音乐，也无法再继续坚持亚里士多德幼稚的宇宙模型。

一方面，在科学研究的各领域中，很少会出现继续沿用 300 年前的思想和概念的情形；另一方面，最新的数学研究可能会参考去年甚至上周才发表的数学定理，但是也有可能引用公元前 250 年阿基米德所证明的球表面积公式。19 世纪的原子结构模型的理论仅仅存在了 20 年就被抛弃了，那是因为有新的发现证明该理论基本原理有错误，这也是大多数科学研究发展的一般过程。因为站在了巨人的肩膀上，所以才能看得更远，所以牛顿对那些巨人不吝溢美之辞（也许没有，参见第 4 章）。但同时，牛顿也许还应该向那些巨人们道歉，因为他的工作使很多他脚下巨人的理论过时了。

但这不是数学理论发展的路线图，尽管用来证明某些结论的形式已经改变了，但是数学结论本身却始终没有什么差别。事实上，正如数学家及作家伊恩·斯图尔特（Ian Stewart）曾经指出的[18]：“在数学领域里，谬误一词表示先前以为是正确的、而后来却发现有错误并被纠正的结论。”并且它们之所以被证明是谬误的结论，也不是因为在其他学科领域有了新的发现，而是通过更仔细、更严格地参考那些同样古老的数学真理才被证实的。难道数学真的是上帝的语言吗？

如果你认为对数学究竟是一种“发现”或是一种“发明”的理解无关紧要，请想想这两个词之间的差异在下面这个问题里的深长意味：“上帝是一种发现还是一种发明？”或者另一个更刺激的问题：“上帝是按自己的模样创造了人，还是人类以自己的形象创造了上帝？”

在本书中我将和大家一直探寻这些以及其他问题的答案。我们将回

顾那些历史上和当今最伟大的数学家、物理学家、哲学家、认知学家和语言学家们在各自领域所作出的卓越贡献，以及在其研究过程中体现出的远见卓识。书中还要回顾一些近代思想家们的观点、警言和他们对这些问题所持有的保留意见。让我们先以早期哲学家们的某些开创性观点为起点，开始这段激动人心的旅程吧。

第2章

神秘学：命理学家和哲学家

人类的进步通常是由认识宇宙的渴望所驱动的。这种探求事物本质、寻根溯源的努力，远远超过了单纯满足生存需要、改善经济条件和提高生活质量的基本要求。当然，这并不是说所有人都会主动去追寻自然奥秘，研究抽象的形而上的哲学命题。为了生存而整日奔波忙碌的芸芸众生，几乎不可能有时间和精力奢侈地思考人生的意义。然而，人类历史上却始终不乏先驱来思考万事万物的根源，探寻那些可被人类认识的宇宙构成方式和规则。在这些人中，有一些人站得更高，看得更远。

众所周知，法国数学家、科学家、哲学家笛卡儿（1596—1650）是现代哲学的主要奠基人之一[19]。从他开始，人类认识自然界的视角，从过去主要以直接感知到的特征为基础的定性描述，转向了通过确定数量为主的定量分析。笛卡儿力图通过使用数学语言从事物基础的微观层面给出科学的解释，这种方式取代了过去大多以触觉、嗅觉、色彩、感觉为要素来表述事物特征的方法[20]。

> 我认为，不管如何，物质世界之外，还有那种几何学家称之为数量的概念，它是几何学家们想要证明的目标……并且由于所有的自然现象都可以用这种方式来解释，所以我不认为除此之外，还有其他任何准则在物理学中可以被接受或令人满意。

有意思的是，笛卡儿不认为他那伟大的科学幻想应当包含在“思考和思维”的领域之内。按他的观点，这与能用数学来解释的物质世界无关。毫无疑问，笛卡儿是过去 4 个世纪以来最有影响力的思想家之一（第 4 章会再次讨论他）。但是，笛卡儿并不是第一个以数学为研究中心的人。认为数学渗透并主宰整个宇宙的这种绝对的观点，虽带有强烈的神秘色彩，却在两千多年前就已经有人提过了，这比笛卡儿的观点更深刻。神秘的毕达哥拉斯就认为，当进行纯理论数学研究时，人类的灵魂沉浸“在音乐中”。

毕达哥拉斯

毕达哥拉斯（大约公元前 572—前 497）也许是人类历史上，既是具有深刻影响力的自然哲学家，又是富于个人魅力的思想哲学家的第一人，他是科学家和宗教思想家的统一。事实上，有人认为是毕达哥拉斯创造了“哲学（philophy）”和“数学（mathematics）”这两个词[21]。其中，“哲学”的字面意思是智慧之爱，而“数学”的字面意思是学习的学科。今天，尽管毕达哥拉斯的手稿已经荡然无存了（如果说它们的确还存在的话，也只是口口相传，并未形成文字），我们能看到的关于毕达哥拉斯的个人传记却一共有 4 本。有 3 本详细的传记大约在公元 3 世纪左右成书[22]（可能只有部分内容真实可信），第四本由一位匿名作者撰写，是从拜占庭主教和哲学家佛提乌斯（Photius，大约 820—891）的著作中保留下来的。要想评价毕达哥拉斯的个人贡献，最主要的困难在于，他的信徒和追随者组成了所谓的“毕达哥拉斯学派”，他们都将自己的研究归功于毕达哥拉斯。因此即使是亚里士多德（公元前 384—前 322）都很难辨别[23]，毕达哥拉斯学派的哲学中，究竟哪一部分是毕达哥拉斯本人的。因此，亚里士多德笼统地将其称之为“毕达哥拉斯学派”或“所谓的毕达哥拉斯学派”。由于毕达哥达斯在后人中的崇高声望，通常大家公认，他至少

是某些毕达哥拉斯学派理论的创始人。柏拉图，甚至哥白尼，都从毕达哥拉斯学派的理论中受益良多。

毫无疑问，毕达哥拉斯大约于公元前 6 世纪早期出生在萨摩斯岛（Samos，爱琴海东部的一座岛屿，距离现在的土耳其海岸不远）。早年他曾经四处游学，足迹遍布埃及，也许还包括巴比伦。他的数学知识至少有一部分是在那里学的。后来，他移居古希腊的克罗顿（Croton，意大利南端附近）。在那里，他的周围迅速聚集了一大批热情的追随者和信徒。

古希腊的历史学家希罗多德（Herodotus，约公元前 485—前 425）认为毕达哥拉斯是“所有希腊人中最有才干的”[26]。前苏格拉底派的哲学家、诗人安培多克莱（Empedocles，约公元前 492—前 432）对毕达哥拉斯更加推崇[25]：“但是，在他们之中，有一个人把其他所有人都远远抛在了身后。他学识渊博，见解深刻，他几乎精通所有的科学领域，并在各个领域都作出了卓越贡献，足以被称为大师。在任何时候，只要他全身心地投入，他就能轻易发掘并分辨出所有的真相。他似乎有十个人，不，是二十个人的智慧。”当然也不是所有人都欣赏他。据说爱非索斯的哲学家赫拉克得特（Heraclitus，约公元前 535—前 475），与毕达哥拉斯本人之间有一些私人恩怨，因此他虽然承认毕达哥拉斯具有广博的学识，但同时又用轻蔑的口吻评价道：“多学习并不能产生智慧，否则的话，就能教会赫西奥德（Hesiod，古希腊诗人，大约公元前 700 年）和毕达哥拉斯了。”

毕达哥拉斯和早期的毕达哥拉斯学派，在他们所生活的那个时代里，既不是严格意义上的数学家，也不是纯粹的科学家。事实上，数字代表的形而上哲学才是他们理论和教义的核心。对毕达哥拉斯学派而言，数学不仅是有生命的存在，也是宇宙运行的法则。它贯穿于任何事物，无论是天上的天国，还是人类的道德，都概莫能外。换句话说，在毕达哥

拉斯学派眼中，数字有两种截然不同，却又紧密相联、互为补充的含义。一方面，数字有明确的物理存在形式；另一方面，它们又是抽象的法则，基于这种法则才能形成万事万物。例如，单子[26]（数字 1①）被认为是所有其他数字的基数，是和水、空气、火（当时它们被认为是构成物质世界最基础的要素）一样的独立存在体。同时，单子也被认为是一种思想，代表形而上哲学中的统一，是所有人类创造物的源头。英国哲学史学家托马斯·斯坦利（Thomas Stanley，1625—1678）曾用优美的文字（这种优美只是针对 17 世纪的英文而言）描述过毕达哥拉斯学派与数字联系在一起时的两种特点[27]：

> 数字有两种类型，知性的（或者说是无形的）和知识的。知性的数字讲的是数字永恒的本质。毕达哥拉斯在他有关上帝的一次演讲中宣称，这种知性是天堂、人间，以及两者之间的自然界中最神奇的一条法则……这也被称为所有事物的法则、根源、基础……知识的数字，被毕达哥拉斯定义为本源的行为拓展和产物，这种本源存在于单子及单子自身的累积之中。

因此，数字不只是用来表示数量的工具。事实上，数字的发现是必然的，因为它们是自然界中万物形式上的代表。宇宙中的所有东西，从物质的实体——例如地球，到抽象的概念——例如正义，都是数。

有人认为数字令人迷恋[28]，这也许并不奇怪。即使是我们在日常生活中每天都会遇到的那些最普通的数字，也有一些有趣的特性。例如，一年有 365 天，365 是 3 个连续的数的平方之和（$365=10^2+11^2+12^2$），而 365 又是两个连续的数的立方和（$365=13^3+14^3$）。让我们再以二月的天数 28 为例。28 是自己所有的约数（被它除后无余数）之

① 代表不可再分的最简单的客观实体。——译者注

和，$28=1+2+4+7+14$，具有这种特性的数字被称为完全数（最小的 4 个完全数是 6、28、496、8 218）。注意，28 还是最小的两个奇数的立方和，$28=1^3+3^3$。还有 100，它在今天我们这个十进制的世界里得到了广泛的应用，也具有一些独特的特性，如 $100=1^3+2^3+3^3+4^3$。

从以上这些数字的特点中我们可以看出，数字的确迷人。也许有人会问毕达哥拉斯学派中数字教义的起源是什么？究竟什么原因使毕达哥拉斯学派认为不仅万事万物都包含数，而且宇宙万物的本质也全部都是数？由于毕达哥拉斯没有任何文字形式的著作留存下来（如果有的话，可能也早已被湮灭在历史的长河中了），今天如果想准确回答这个问题十分困难。现存的有关毕达哥拉斯本人学说的资料，主要是来自于前柏拉图时期一些只言片语的记载，以及后期一些可信度不高、主要源于柏拉图和亚里士多德学派的相关哲学讨论。综合历史上所有有关的线索，我们可以认为，数字之所以令人困惑，但又使人着迷，其根本原因也许还在于毕达哥拉斯学派重视音乐的体验和对星空的观察。这两种活动虽然表面上毫无关联，但按毕达哥拉斯学派的观点，它们都与数学紧密联系。

要想理解数字、星空和音乐之间神秘的联系，以及这些联系之间的具体认识，就不得不从毕达哥拉斯学派利用小卵石、圆点来计数说起。例如，毕达哥拉斯学派把数字 1、2、3、4……个卵石排列成三角形，摆成如图 2-1 所示的形状。特别需要注意的是，图中第 4 个三角形是由前 4 个整数构成（共由 10 块卵石排列而成，每行卵石代表一个整数），它被称为*四元体*（Tetraktys，意思是 4 或四进制的）。在毕达哥拉斯学派的观念中，四元体是完美的代表，并且是构成事物的基本要素。有关毕达哥拉斯和四元体的故事，在历史上也曾有流传。古希腊讽刺作家卢西恩（Lucian，约公元前 120—前 80）就曾记录，毕达哥拉斯有一次请某人为他计数[29]，当这个人数着“1、2、3、4……”时，毕达哥拉斯打断了他：

“看到没有？你把 10 当成了 4，这是一个完美的三角形，这也是我们的誓约符号。”新柏拉图派哲学家亚姆利库（Iamblichus，约公元 250—325）认为，毕达哥拉斯学派的誓约是真实存在的，其内容如下：

> 我以发现四元体的名义宣誓[30]，它是我们所有智慧的源泉，同时也是永恒的自然根源。

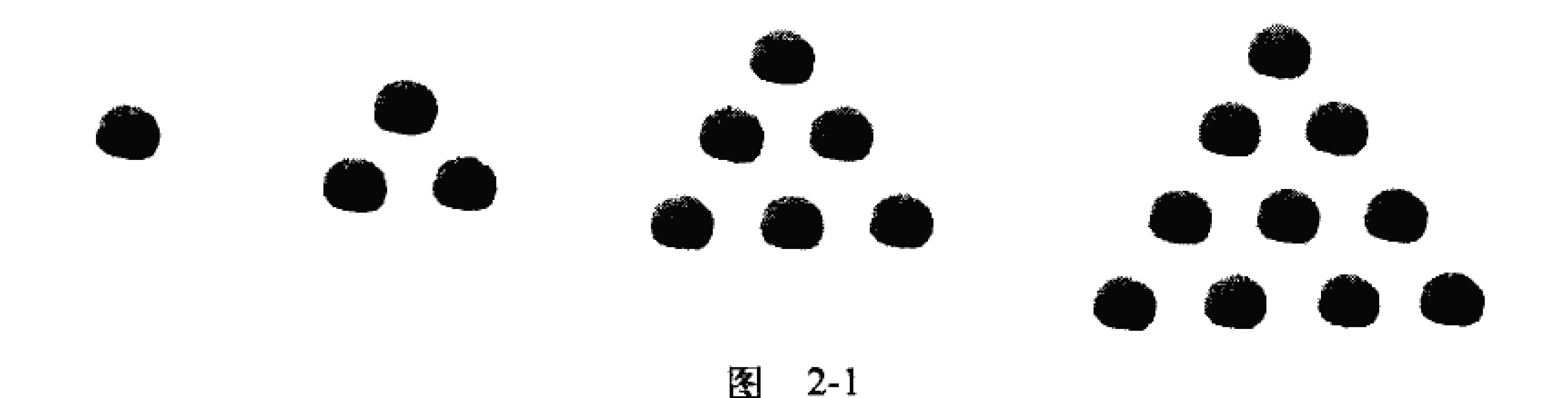


图 2-1

为什么毕达哥拉斯学派会如此推崇四元体？这也许是因为在公元前 6 世纪的毕达哥拉斯学派眼中，四元体似乎体现出了整个宇宙的全部本质特征。在几何学中（这是古希腊时期划时代思想革命的踏板和起点），数字 1 代表点•，数字 2 代表线•——•，数字 3 代表面，数字 4 代表三维四面体。以这种观点分析，四元体包含了空间中所有可见的维度①。

但这只是开始。四元体在量化研究音乐时，也出乎意料地得到了应用。人们普通认为毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派发现了用连续的数字分割弦可以产生谐音及协和音程的奥秘，这在任何一首弦乐四重奏表演中都会有所体现。毕达哥拉斯发现，当两根相似的弦被同时弹响时[31]，如果弦的长度比是单比例的，就会发出令人愉悦的动听声音。例如，长度

① 毕达哥拉斯学派认为，点流动产生了线，线流动产生了平面，平面运动产生了立体，这样就产生了可见的世界。——译者注

相等的弦（此时比例为 1：1），产生的是同音；当比例为 1：2 时，产生的是八度和音；当比例为 2：3 时，发出的是纯五度和音；当比例为 3：4 时，产生的是纯四度和音。除了有这种“涵盖所有”的空间属性外，四元体还被看做构成和谐音阶的数学比例典型代表。发现空间和音乐之间这种奇妙联系是毕达哥拉斯学派的有力标志，并且这种发现让他们感觉像是科斯摩斯（kosmos，意为事物按序排列之美）的哈尔摩尼亚（Harmonia，古希腊神话中的守序之神）。

那么，天空和数字的关系又是怎样的呢？毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派在历史上又扮演了天文学家的角色，这个角色并不是十分关键，但也决非无足轻重。正是毕达哥拉斯学派首次提出了地球是球形的观点（也许是因为他们认为球形在数学上是最美的），也可能是他们首先宣称，行星、太阳和月亮都有各自独立的自西向东的运动，与它们绕恒星运动时的方向相反（这很明显）。喜欢夜晚星空的人肯定不会错过欣赏恒星星座最明显的两个特征——星座的形状和组成星座的恒星数量。事实上，我们认识的星座，正是通过星座包含的恒星数量，以及这些恒星形成的几何图案来区分的。这两个特征也是毕达哥拉斯学派关于数字绝对本质的教义的核心部分，四元体就是一个典型例子。毕达哥拉斯学派为“几何学中的图形、天空星座，以及音乐中的和音，都取决于数字”感到欣喜若狂。他们确信数字是组成宇宙最基础的因素，并且还是隐藏于这些存在背后的主宰法则，这也就是毕达哥拉斯所着重强调的“万物均取决于数”。

今天，我们可以从亚里士多德的两条评论中看出毕达哥拉斯学派是怎么把这条格言奉为圭臬的。第一条是在亚里士多德收集的专著《形而上学》中，他写道：“毕达哥拉斯学派致力于研究数学，正是他们让这门科学在历史上第一次得到了真正发展。并且通过深入的研究，他们逐渐形成一种观念，认为数学规律也是宇宙万物的规律。”在另一段中，亚里士多德生动地描述了毕达哥拉斯学派对数字的崇拜，以及四元体在

他们的学说中担负的重要角色："欧律托斯（Eurytus，他是毕达哥拉斯学派中研究语言的学生）解决了什么物体有什么样的数的问题（例如，这是人的数，那是马的数）。在他们把数字引入三角形或正方形结构之后，他利用小卵石模仿生物外形。"最后一句"三角形或正方形"既暗指四元体，也暗指毕达哥拉斯学派中另外一个令人着迷的结构——磬折形①。

"磬折形"[32]一词起源于一个名叫"巴比伦"（Babylonian）的时间测量仪器，它主要用于天文学观测中，与日晷极为相似。这种仪器似乎是由毕达哥拉斯的老师、自然哲学家阿那克西曼德（Anaximander，约公元前611—前547）引入古希腊的。毫无疑问，在几何学上，学生受老师学术思想的影响很深，并将其研究成果应用于宇宙学（从整体上研究宇宙的学问），以进一步发扬光大。后来，"磬折形"被当做绘制角度的工具，有点像木匠使用的直角尺，也被用来表示直角。此时每增加一个磬折形，就会形成一个更大的正方形，如图 2-2 所示。值得关注的是，如果用 7 块卵石在一个 3×3 的正方形上增加一个磬折形，就会得到一个由 16 块卵石（4×4）组成的正方形。这个过程非常直观形象地说明了以下的特性：在由奇数 1,3,5,7,9…构成的数列中，任何一组连续的数（从 1 开始）之和都会是一个平方数。例如 $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 9 + 11 = 25 = 5^2$。毕达哥拉斯学派认为磬折形与其"包含"的正方形之间紧密的联系是通用知识的代表，这种"紧密的联系"是可以观察到的。这样，数字不仅可以被用来描述物理世界，也被当做人类精神和情感的基础。

---

① gnomon，在几何学中，它指自平等四边形的一角除去一个相似形后所余的图形。
——译者注

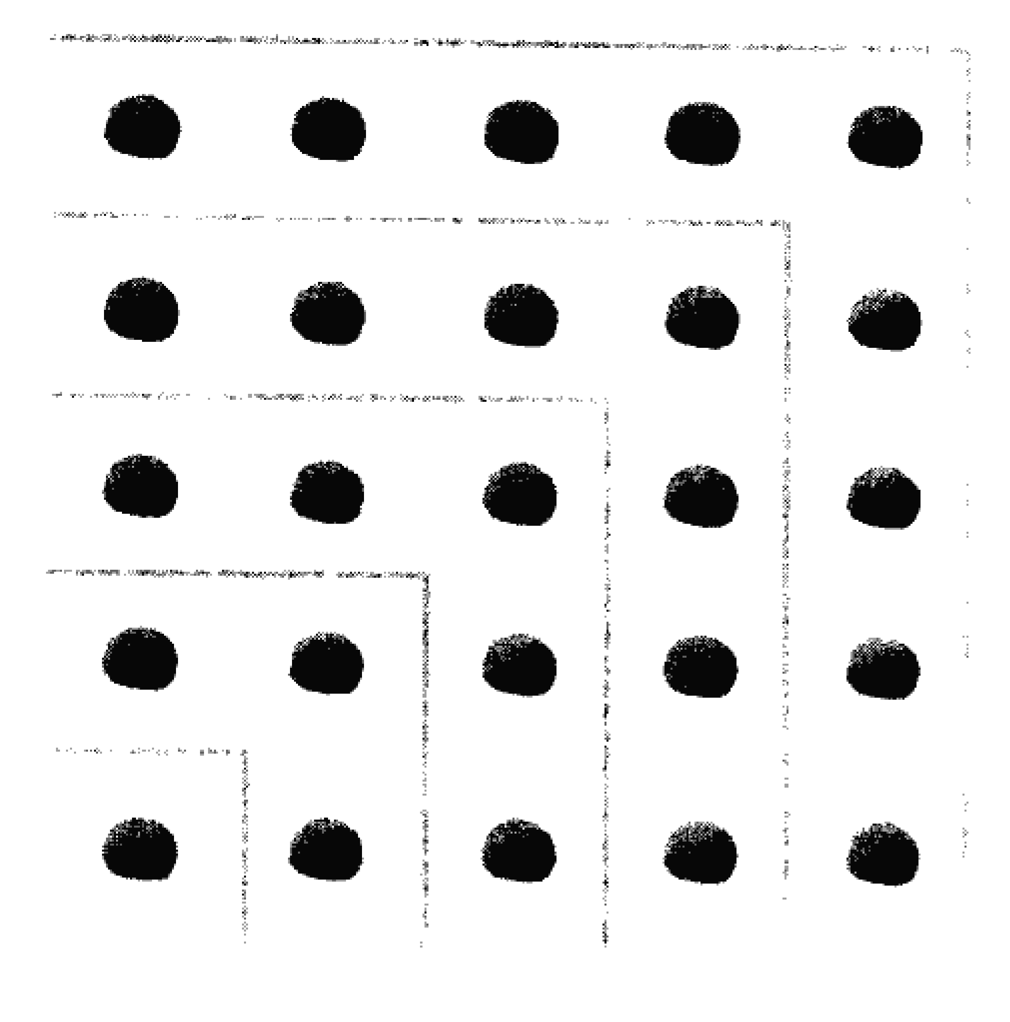


图　2-2

平方数及与其相关的磬折形也许还是大名鼎鼎的毕达哥拉斯定理的前身。这条著名的定理讲的是，在任何一个直角三角形中（如图 2-3 所示），如果分别以三角形的 3 条边为边长作正方形，那么以斜边为边长的那个正方形的面积，是以直角边为边长的两个正方形面积之和。卡通画《弗兰克和欧内斯特》（*Frank and Ernest*）直观、幽默地反映了这条定理（如图 2-4 所示）。回想一下图 2-1 中的那个磬折形，在一个 4×4 的正方形中增加一个平方磬折数 $9=3^2$，就会得到一个新的 5×5 的正方形，结果怎么样？$3^2+4^2=5^2$，数字 3、4、5 可以代表直角三角形的边长。事实上，凡是具有这种特征的整数（例如对于 5、12、13，有 $5^2+12^2=13^2$）都被称为“毕达哥拉斯三元数组”。

很少有数学定理能像毕达哥拉斯定理那样以发现者的名字命名。在 1971 年，尼加拉瓜共和国挑选了 10 个公式，以“改变世界面貌的 10 个数学公式”的题目作为一组纪念邮票的主题，毕达哥拉斯定理作为其中的第二张被出版发行（如图 2-5 所示，该组邮票的第一张上绘的是“$1+1=2$”）。

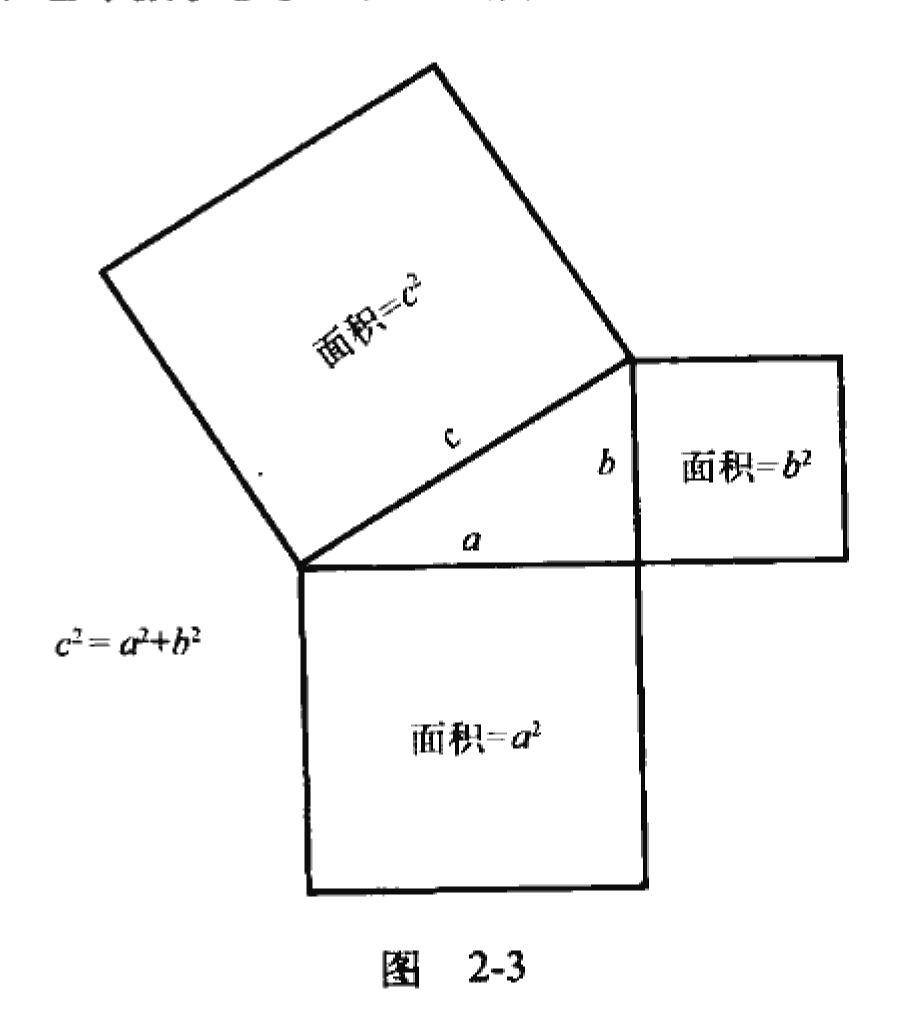

面积$=c^2$
c
b
面积$=b^2$
a
$c^2=a^2+b^2$
面积$=a^2$

图 2-3


FRANK AND ERNEST®
毕达哥拉斯定理
以古希腊数学家毕达哥拉斯的名字命名。
定理认为
$A^2+B^2=C^2$
A、B代表直角三角形的两条直角边，C代表三角形的斜边
你也许是正确的，毕达哥拉斯，但是如果你把它称为“斜边”的话，所有人都会嘲笑你的！
www.comics.com
E-mail:mail@frankandernest.com ©2006 Thaves / dist. by NEA, Inc.
THAVES 10-15

图 2-4



图　2-5

你也许会有疑问，毕达哥拉斯是否真的是第一个明确描述这条著名定理的人？一些早期的希腊历史学家的确这么认为。古希腊哲学家普罗克洛斯（Proclus，约 411—485）在评论《几何原本》时写道（由欧几里得（约公元前 325—前 265）所著，在几何学领域和数论领域具有非常巨大的影响力）："如果我们听到有人详细叙述古代历史的话[33]，就会发现人们把这条定理归功于毕达哥拉斯本人，并且还说他专门献祭了一头公牛以庆祝这条定理的发现。" 然而，事实上，毕达哥拉斯三元数组在古巴比伦楔形文字刻写板上就已经出现了，现存于美国哥伦比亚大学。这块名为 "Plimton 322" 的石板的历史大约可以追溯到汉谟拉比王朝时代（约公元前 1900—前 1600）。除此之外，以毕达哥拉斯定理为基础的几何学在古印度建造祭坛时也有应用。《百道梵书》（*Sataphtha Brahmana*，古印度的圣典）清楚地介绍了这些建设结构[34]，该书成书时间至少要比毕达哥拉斯早几百年。但是，无论是不是毕达哥拉斯本人第一个发现了这条

定理，毫无疑问的是，在人类发现了把数字、形状和万物编织在一起的复杂联系后，毕达哥拉斯学派才得以从细节上更深入地研究次序的形而上哲学含义。

另外一个在毕达哥拉斯学派的世界里居于核心地位的观念是宇宙对立。因为对立的形式是早期爱奥尼亚（Ionian）科学传统中基础的准则，所以迷恋次序的毕达哥拉斯学派很自然地就吸纳了这种思想。亚里士多德曾提到，甚至有一位名叫阿尔克梅翁（Alcmaeon）的医生也认为万物都是成对出现，并且认识到两者之间处于一种神奇的平衡。他与毕达哥拉斯是同时代的人，当时也居住在克罗托（Croton），毕达哥拉斯那所著名的学校就座落于此。最重要的一组对立是有限（以奇数为代表）和无限（以偶数为代表）。有限是一种力量，把次序以及和谐引入到无序、放纵和无穷之中。从微观的角度讲，整个宇宙和人类生命的复杂性都可以被认为是由一系列对立事物（在某种程度上和谐统一）组成并支配的。这种黑与白交织在一起形成的关于世界本质的认识论，在亚里士多德的《形而上学》一书中被总结为了“对立表”：

有限	无限
奇数	偶数
单数	复数
右	左
男	女
静止	运动
直	弯
光明	黑暗
好	坏
正方形	长方形

对立表所反映出的哲学思想[35]并不仅仅局限于古希腊，中国古代阴

阳的观念也表现了同样的思想。在中国阴阳的观念里，阴代表负面的和黑暗的，阳代表光明的和积极的。借助天堂和地狱的概念（或者干脆就像美国总统声明的那样："不与我们站在一起，那他就是恐怖主义分子"），可以很容易理解这种对立的观念，并且它在基督教教义中得到了延续和传承。如果能更进一步的话，我们还可以说生命的意义是被死亡所阐明，而知识的力量正是被无知所衬托，这是不变的真理。

当然，即使在毕达哥拉斯学派中，也不是所有人的研究都直接与数字相关。毕达哥拉斯学派组成了一个结构紧凑的社会组织，他们倡导素食，虔诚地信奉灵魂可以转世重生，并能够恒久不灭。同时，他们还神秘地禁止食用豆子，对此有几种解释。其中一种是他们把吃豆子与吃活的灵魂相提并论。还有一种解释是吃豆子后会放屁，而这被认为是呼吸已停止的证明。在《人体的哲学》（*Philosophy for Dummies*）[36]一书中，作者这样总结毕达哥拉斯学派的教义："万物都由数组成，不要吃豆子，因为它们会把你引入歧途①。"

现存关于毕达哥拉斯最古老的故事与他信奉灵魂转世有关[37]。这个最富有诗意的故事是公元前 6 世纪科洛封（Colophon）的诗人色诺芬尼（Xenophanes）所讲述的："据说，毕达哥拉斯曾经有一次在路上遇到一条正被打得遍体鳞伤的狗，毕达哥拉斯十分怜悯它，他呵止道：'停，别打它了，我认识这条狗，它身体里的灵魂是我的一位朋友，从它的叫声里我能听懂他的声音。'"

毕达哥拉斯的思想，不仅体现在继他之后的希腊哲学课程中，而且一直延续到了欧洲中世纪大学的课程里。在当时的大学中，7 门学科被划分为"三课程"（trivium）和"四学科"（quadrivium），三课程是指辩证法、修辞和语法，四学科是毕达哥拉斯学派最钟爱的几个主题——几何、算术、

① "引入歧途"的原文是"they'll do a number on you"，一语双关。——编者注

天文和音乐。根据毕达哥拉斯学派理论，天空中的星辰在其运行轨迹上演奏最华丽动听的乐章，而这只有毕达哥拉斯才能听到。在毕达哥拉斯的时代，天空中"星球发出的和谐音乐"极大激发了那个时代诗人和科学家的灵感。著名的天文学家约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler，1571—1630），在发现了行星运动规律之后，就选择了用"世界的和谐音"（Harmony of the World）作为他最具影响力的一篇论文的题目。根据毕达哥拉斯学派的思想，开普勒甚至还进一步为不同的行星进行了细微"调音"（正如演奏家古斯塔夫·霍尔斯特在3个世纪后所做的那样）。

以本书关注的焦点来分析，如果把毕达哥拉斯学派哲学思想中那层神秘的外衣剥去的话，我们就会发现其学说的主体部分，在数学、数学本质以及数学与物理世界和人类精神之间的关系等方面具有重大影响[38]。毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派是人类认识宇宙、探索宇宙秩序的先行者，被认为是理论数学的创始人。与他们的前辈（主要是巴比伦人和埃及人）不同的是，毕达哥拉斯学派在研究数学时，更侧重于把数学作为一门抽象的学问来看待，任何出于实用性目的的分析，都不是他们思考的重点。毕达哥拉斯学派是不是还建立了作为科学研究工具的数学体系？这个问题十分棘手，难以给出明确的回答。毕达哥拉斯学派的确把万事万物都和数字联系在了一起，但是事实上，他们研究的重点是数字本身，而不是现象或现象背后的原因。对科学研究而言，这并不是一条特别能创造丰硕成果的研究道路。与此同时，毕达哥拉斯学派教义的基础，是对普遍存在的自然规律的绝对信仰。这种已经成为现代科学核心支柱的信仰，也许还是古希腊悲剧所反映的主人公那不可抗拒的悲剧性命运的根源。直到进入文艺复兴时期后，人们仍然坚信这种规则体系能够解释万物，而且在还未找到任何具体证据之前，这种信仰仍在与日俱增。只有伽利略、笛卡儿、牛顿在归纳基础上把这种信仰转化成了可证明的命题。

毕达哥拉斯学派的另一项重大贡献是清楚地认识到他们自己的“数字宗教”是不切实际的。对毕达哥拉斯学派而言，这种认识有点残忍，但却是事实。整数 1,2,3,4…并不足以构建完整的数学体系，更不用说用它们去解释宇宙了。看看图 2-6 中的正方形，如果把它的边长定义为 1，把对角线的长度设为 d，根据毕达哥拉斯定理，将正方形分成两个直角三角形，利用其中任何一个三角形就可以很轻松地计算出这条对角线的长度。根据定理可知，正方形的对角线（也就是直角三角形的斜边）的平方，等于三角形两条直角边的平方和，$d^2=1^2+1^2$，即 $d^2=2$。只要理解了正数的平方，就会明白数的平方根是什么（例如，如果 $x^2=9$，那么正的 x 为 $\sqrt{9}=3$）。此时，$d^2=2$，那么就意味着 $d=\sqrt{2}$，也就是说，正方形对角线长度与边长长度之比等于数字 $\sqrt{2}$。这是一个真正令人震惊的发现，它足以摧毁毕达哥拉斯学派结构严谨的离散数字的哲学体系。毕达哥拉斯学派的一位信徒[39]（也许是来自梅塔蓬图姆的希帕苏斯，他大约生活在公元前 5 世纪前半叶）成功证明了 2 的平方根不能表示成两个整数的比值。换句话说，尽管我们有无穷多的整数可供选择，但是如果想从中找出两个数，使其比等于 $\sqrt{2}$，这种努力从一开始就注定不可能成功。能表示为两个整数之比的数（例如 3/17、2/5、1/10、6/1）被称为有理数。毕达哥拉斯学派证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数。事实上，在这个发现之后不久，人们就认识到 $\sqrt{3}$ 、$\sqrt{17}$ 也不是有理数。更进一步的话，那些不是完全平方数的数字（如 16、25），其平方根都不是有理数。该发现带来的后果是戏剧性的。毕达哥拉斯学派证明了在无穷多的有理数之外，还不得不增加同样无穷多的的一类新数，也就是今天我们所称的无理数。无理数的发现对以后数学分析发展的重要性，怎么强调都不过分。但是，无理数使 19 世纪的人类认识到了存在“可数的”极限和“不可数的”极限[40]。在无理数的发现之后，毕达哥拉斯学派迅速被推向了风口浪尖，铺天盖地的哲学批判几乎要将其淹没，哲学家亚姆利库（Iamblichus）[41]记载了

那位发现了无理数，并将其特性告之于“那些不值得分享理论的”的人，他“受到排挤和痛恨，不仅被禁止与毕达哥拉斯学派日常联系，甚至于连他的坟墓都已经被提前修建好了，好像（他们）先前的这位同道已经被排除在人类范畴之外了。”

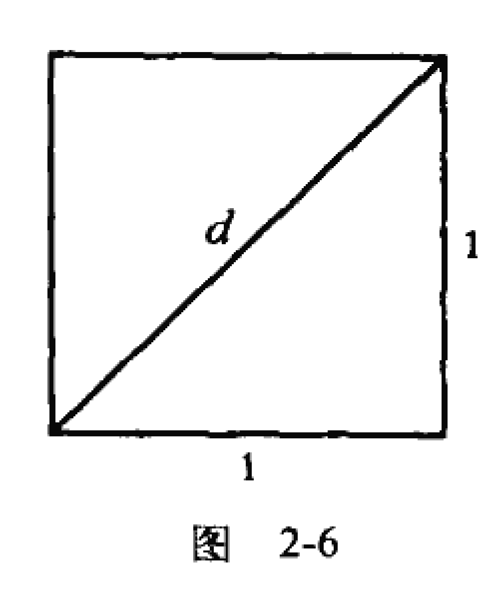


图 2-6

事实上，也许比发现无理数更重要的，是具有开拓精神的毕达哥拉斯学派在数学证明上的坚持，这种证明步骤从一些假设出发，完全基于逻辑推理，这样，任何一个数学命题的正确性都可以确定无疑地得到证实。在古希腊人之前，甚至是数学家们，也没有料到有人会有兴趣（哪怕是一点）进行上述这种劳心的研究，而这种研究早已为他们带来了新发现。如果数学秘诀能在实践中应用，例如把土地合理地分成几块，就已经足以证明其有效性了。而另一方面，古希腊人想弄清楚为什么数学会在这个过程起作用。这个证明题也许是由米利都（Miletus）的哲学家泰勒斯（Thales，约公元前 625—前 547）第一次提出的。毕达哥拉斯学派中有一部分人想把这种实践（证明）变成探知数学真理的无可挑剔的完美工具。这一证明在逻辑上是重大突破，巨大意义不可估量。以假设为起点的证明迅速奠定了数学坚实的基础性地位，这远比同时代哲学家的其他学科讨论更可靠。一条严格的证明需要一系列严谨的、没有任何漏洞的推导步骤，但是一旦其过程完全成立，那么与此相关的数学表达的正确性将不容置疑。甚至是阿瑟·柯南·道尔，这位世界上最有名的

侦探的创造者，也承认数学证明的特殊地位。在他的小说《血字的研究》中，夏洛克·福尔摩斯就曾声称，他的结论“像欧几里得的数学命题那样绝对可靠”。

至于数学是一种发现还是一种发明，对于毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派，这并不是一个问题。他们认为数学是真实的，不可改变，无处不在，并且比脆弱的人类大脑可能想到的所有事物都更加值得崇拜。毕达哥拉斯学派完全把宇宙嵌入到了数学之中。事实上，对毕达哥拉斯学派而言，上帝不是一位数学家[42]，数学才是上帝。

毕达哥拉斯学派哲学的重要性不仅在于其真实的、内在的价值，通过创造条件，拓展研究范畴，它为下一代哲学家（主要是柏拉图）创造条件，毕达哥拉斯学派在西方思想史上占据有极其重要的地位。

进入柏拉图的洞穴

著名的英国哲学家、数学家怀特黑德（Alfred North Whitehead，1861—1947）曾经这样评价[43]：“关于西方哲学史最准确的概括就是，这些都是柏拉图思想的脚注。”

事实上柏拉图（约公元前 428—前 347）最先把数学、科学、语言学、宗教、伦理、艺术等学科融合在一块，统一对待、研究，这种方法的本质是把哲学定义为一门学科。对柏拉图而言，哲学并不是那种与日常活动完全脱节的、抽象的主题，而是引导人类按正确的方式去生活、认识真理，并管理他们的政治活动的主要力量。尤其需要注意的是，柏拉图认为哲学能帮助人类进入真理的王国。在柏拉图的观念里，真理王国绝非人类可轻易触及，如果我们只是通过直接的感官感知，或者仅仅利用简单的常识来推导，就想进入这个王国，是不可能成功的。那位纯粹知识、绝对完美和永恒真理的不懈追寻者是谁呢[44]？

柏拉图出生于雅典，也有记载认为是埃伊纳岛（Aegina）。他的父亲

是阿里斯通（Ariston），母亲是克里提俄涅（Perictione）。图 2-7 是柏拉图的罗马石柱头像，它极有可能是现存最接近柏拉图本人的雕塑了，据说是根据公元前 4 世纪的古希腊作品复制的。柏拉图父母两族都人材辈出，比如梭伦（Solon），他是一位著名的立法学家，还有科德罗斯（Codrus），他是雅典最后一位国王。柏拉图的叔叔卡尔米德（Charmides）、表舅克瑞提亚斯（Critias）是著名哲学家苏格拉底（约公元前 470—前 399）的好友，而苏格拉底对柏拉图在许多方面都有深远的影响，特别是对柏拉图早期哲学思想的形成更是如此。早年，柏拉图的志向是从事政治，但是当时一系列政治派系之间的暴力活动使他对当时的政治十分失望。后来，早期这种由政治带给他的厌恶感，刺激他开始思考教育本质。在柏拉图看来，教育的本质就是培养日后保护国家的精英。有一次，他甚至试图（当然最终他并未成功）成为锡拉丘兹（Syracuse）的国王狄奥尼修斯二世（Dionysius Ⅱ）的家庭老师。

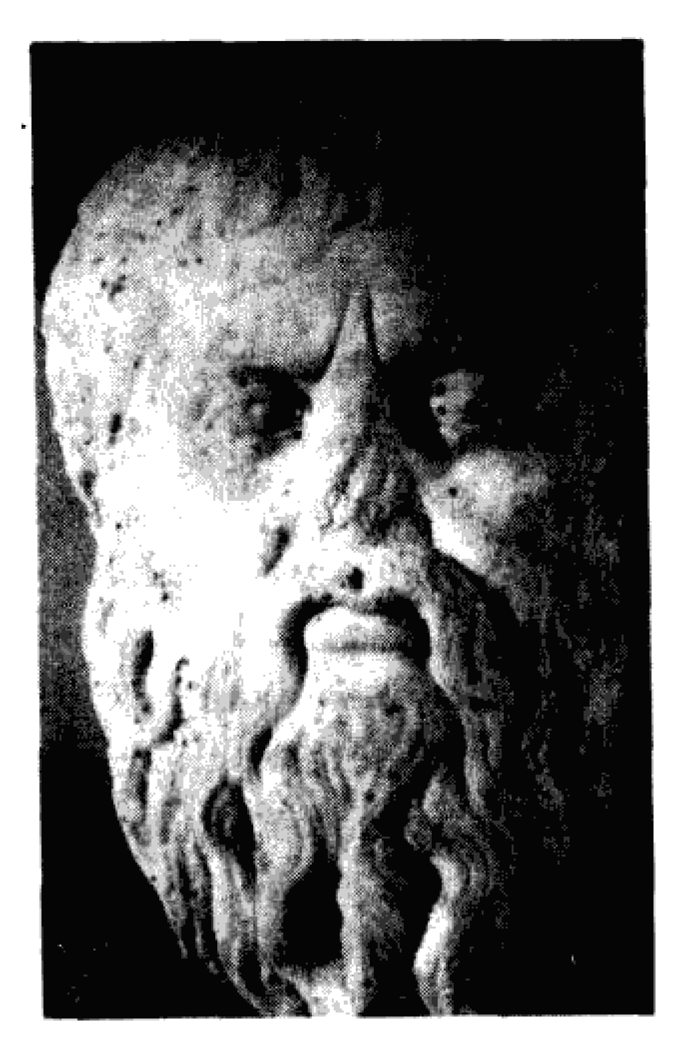


图 2-7

公元前 399 年苏格拉底被判处死刑，这件事对柏拉图刺激很大。之后他开始广泛的游历，直到公元前 387 年左右，他建立了一所著名的学院（Academy）。这所学院讲授的课程主要是哲学和科学。直到去世时，柏拉图一直担任该学院的院长。在他之后，该职位由他的外甥斯珀西波斯（Speusippus）继任。与今天正规的高等院校不同，Academy 学院有些不正式，学院的学生大多都是当时的俊杰，他们在柏拉图的指导下，根据自己的兴趣自由选择研究方向，而后进行深入的研究。学院不收学费，没有必须遵照执行的课程表，甚至没有全职的教职人员。尽管环境十分宽松，但想进入学院学习却不是那么容易，据说学院有一条明确的“入门须知”。根据公元 4 世纪罗马国王、“叛教者”朱利安的某次演讲[45]，我们得知，柏拉图的学院门口悬挂着一块颇为沉重的石碑，然而石碑铭文的具体内容是什么，在朱利安的演说中并未明确提及。但在公元 4 世纪的一部著作的旁注中却有记载：“不懂几何的人不得入内。”柏拉图学院的建立与对这块石碑铭文的首次描述之间相隔了至少 800 年，因而我们不能完全确定这句话的真实性。不过，毫无疑问，这个苛刻的要求所表达的含义反映了柏拉图对待数学的态度。在柏拉图一篇有名的对话《高尔吉亚篇》（*Gorgias*）中，他表示：“几何中的等式对于诸神和人类都同样重要。”

柏拉图学院中的“学生”通常自己承担食宿。他们中的某些人，例如亚里士多德，甚至在里面呆了 20 年。柏拉图认为与那些富有智慧的俊杰朝夕相处，共同研究，不断讨论，可以相互启发，教学相长，这种可以不断激发新思想的学习方式是最好的学习方法。他们研究的课题范围十分宽泛，涵盖抽象的形而上哲学、数学、伦理学、政治学，等等。在柏拉图学院中所教授的学科是十分纯粹的，甚至在某种程度上可以说是神圣的。比利时象征主义画家琼·戴尔维（Jean Delville，1867—1953）在一幅名为《柏拉图的学院》的绘画作品中，传神地捕捉到了这种品质，

并通过他的作品进行了精彩的诠释。为了强调柏拉图学生们的自由精神，戴尔维用裸体的艺术形式表现他们的形象，画作中的人物看起来都是中性（兼具两性）的，这是因为这种形式被认为是人类最原始的形态。

考古学家至今仍未发现任何柏拉图学院的遗迹，对此我非常失望[46]。2007年夏天，我去希腊旅游了一次，期间我特地去探寻了柏拉图学院存在的线索。由于柏拉图曾提到宙斯柱廊（公元前5世纪修建的有顶人行道）是与朋友交流的最好去处，我专门去那看了看。今天这条柱廊只留下一些断壁残垣（如图2-8所示），位于雅典西北部的一所古集市内。但是在柏拉图时代这个地方可是世界文明的中心。必须要说的是，虽然那天室外气温高达 115℉，但当我徘徊在这条小道上时，仍然不由自主激动地颤抖。想象一下吧，我脚下的小道，也是人类历史上最伟大的那些人同样走过了成百上千次的地方。

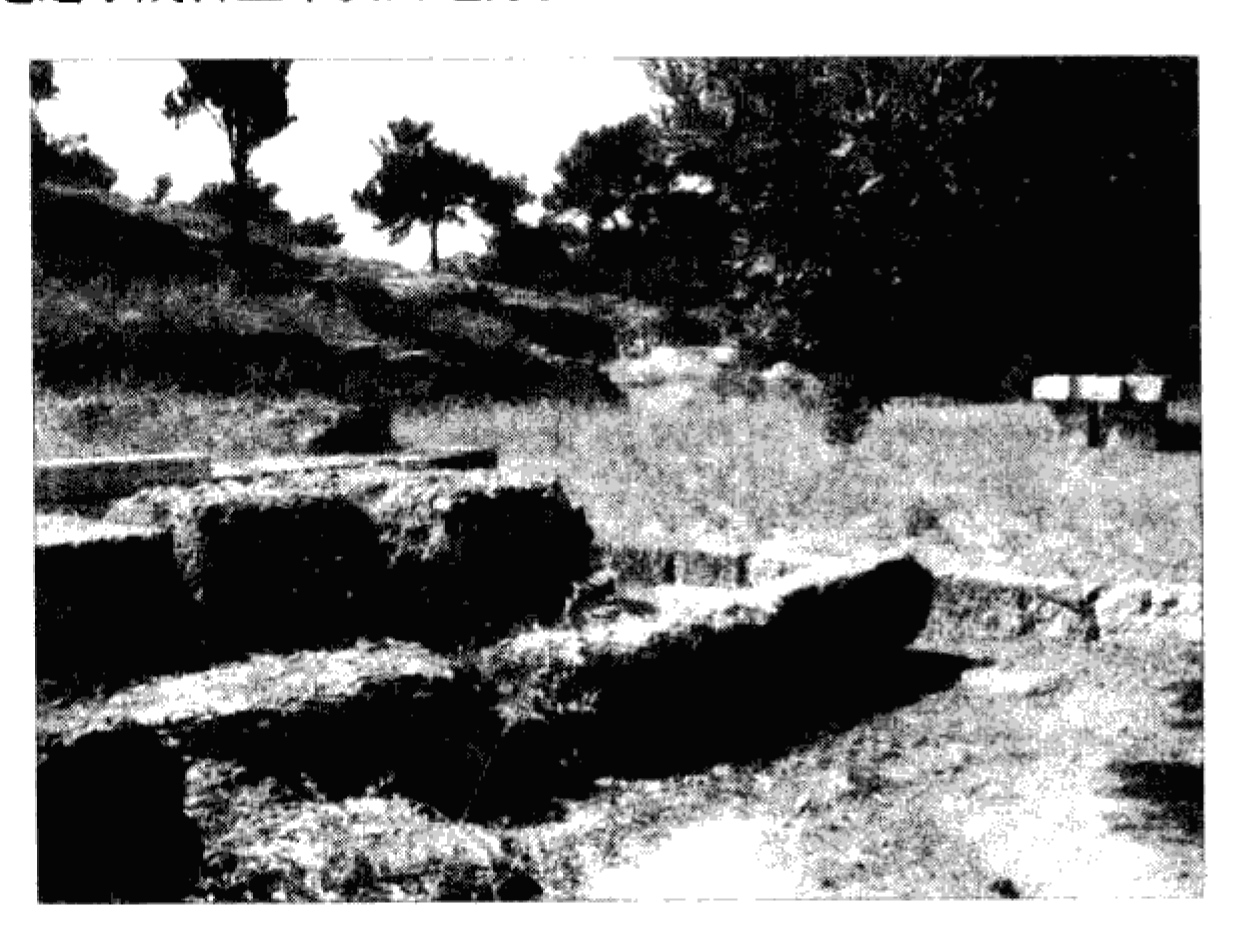


图 2-8

柏拉图学院大门上那块传奇的石碑清楚地表达了柏拉图对数学的态

度。事实上，公元前 4 世纪最重要的数学研究与发现，都与柏拉图学院有着千丝万缕的联系。然而，让人吃惊的是，柏拉图本人却不是一位专业的数学家，他对数学直接的贡献就更少了。在某种程度上，他只是一名热情的观众，是激发竞争的源头，是能给出准确评价、富于洞察的评论家，是鼓舞人心、激发前进动力的向导。公元 1 世纪，哲学家、历史学家菲洛德穆[47]（Philodemus）描绘了这样一幅画面："柏拉图好像是一位总设计师，他提出问题，分配人员，安排进度，数学家们则极其认真地开展研究。通过这样的研究方式，当时最伟大的发现都集中在了数学领域。"新柏拉图派的哲学家、数学家普罗克洛斯[48]（Proclus）补充道："出于对数学等研究领域的热情，柏拉图极大地发展了数学，特别是几何学。众所周知，他在著作中高度关注数学课题，并且不遗余力地引导并激励他的学生在各自研究中重视数学。"换句话说，尽管柏拉图本人的数学成就并不突出，但他对数学的理解基本与时代同行，他是一位问题发现者，并能与数学家进行平等的对话和交流。

另外一项评判柏拉图在数学领域中的贡献的重要证据，来自于他的著作《理想图》（*The Republic*），这也许是他最重要、最伟大的对话录。在《理想国》一书中，各种思想融合为一体，包括美学、伦理学、形而上哲学和政治学。在这本书的第 7 章，通过主要的对话对象苏格拉底之口，柏拉图提出了通过教育培养乌托邦管理者的宏伟计划。这张严格的培训课程表（也许过于理想化了）中包括以下内容：从孩童时期就通过戏剧、旅游和体操对他们进行训练，之后从中挑选出有培养前途的苗子，进行不少于 10 年的数学教育、不少于 5 年的辩证法教育，以及不少于 15 年的实践锻炼。实践锻炼的主要途径是让他们在战时和平时担任"适合于年轻人"的领导职务，通过这种方式增加实际经验。对于为什么要对那些未来的政治精英进行这种严格的训练，柏拉图给予了清晰明确的解释[49]：

> 我们需要那些就职后不会变得墨守成规的人，否则，就会有一场竞争了。还能有比那些从政经验丰富、拥有各种卓越才能、适合政治家生活的精英更合适的人，来管理这座城市吗？

令人耳目一新，是吧？这种要求即使在柏拉图时代可能也是不切实际的。不过，乔治·华盛顿就认同柏拉图的某些观点，他认为对未来政治家进行数学和哲学教育是十分有必要的[50]：

> 数学，就某种程度而言，不仅在现代文明时代各行各业中都不可或缺，而且在人们探索数学真理的过程中，会使人类思维习惯于通过推理的方法思考解决方法和寻找正确答案。同时，它也是培养理性思维最有效的方式。事物存在本身就令人难以理解，有太多不确定因素交织在一起，阻碍了我们对事物的认识，然而理性思维能帮助我们发现其根源。有了数学和哲学的引导，人类会不自觉地进行全面的观察和深入的思考。

数学的本质是什么？比起柏拉图是数学家还是研究的发起者这类问题来，更值得关注的问题是，柏拉图是一位数学哲学家吗？柏拉图那光耀千古的思想不仅使他超越了所有同时代的哲学家和数学家，而且也使他成为随后千年以来最具影响力的重要人物之一。

柏拉图关于数学本质的观点，在他那个著名的山洞的寓言里得到了极好的诠释，在这个寓言中他着重表达了对人类感官所提供信息的正确性的怀疑。柏拉图认为，人类所能感知的世界，并不比在洞穴墙壁上投射的阴影更真实[51]，这儿有一段摘自《理想国》的著名篇章：

> 假设有一群人居住在地底一个山洞中，这个山洞只有一个长长的出口，洞口正对着横扫过的光线。这些人从小就被困在这个山洞里，他们的腿和脖子都被绑起来，不能随意移动，头

> 部也不能任意转动，只能看到自己的正前方。洞中的光明来自于他们头顶和身后极远处的火堆，在火和这些居民之间有一条小路，路的尽头有一面墙，它有点儿像是木偶剧中观众面前的幕布，通过这块幕布能看到木偶的表演。从墙上还能看到人类拿着手工制品、木头、石块和其他各种材料进行生产活动，所有这些场景都被投射到了这面墙上。你可以想象，这些人看不到他们自己和别人，而只能看到被火光映射到洞中那面墙壁上的影子。

根据柏拉图的观点，我们与那些生活在山洞中、把影子当做真实存在的人，在本质上并没有什么不同（图 2-9 所示的版画是简·萨恩莱姆于 1604 年创作的，版画的内容表现的就是柏拉图的这个寓言）。特别需要关注的是，柏拉图着重强调，数学真理反映的不是圆、三角形、正方形这些可以被画在纸莎草纸上，或者用一根木棍画在沙滩上的有形的事物，而是存在于理想世界中抽象的无形的东西，这个理想世界是所有真理和完美汇集的地方。这个数学形式的柏拉图世界与物理世界截然不同，并且正是在这个世界中，数学命题——例如毕达哥拉斯定理，才是真正正确的。我们能描绘在纸上的直角三角形并不是完美的直角三角形，它只是理想的、“真正”的直角三角形的一个近似副本。

柏拉图关注的另一个基础课题就是数学证明过程的本质，他从细节上对这个问题进行了研究，这种证明过程以假设和公理为基础。这里所谓的公理就是一些基础的论断，它们的正确性被认为是不证自明的。例如，欧几里得几何学中第一条公理是：两点之间只有一条直线。在《理想国》中，柏拉图用十分精辟的语言，把假设的概念，与他的数学世界的概念联系在了一起。



图 2-9

我想你应当知道，那些专注于几何学和算术学以及其他相关学科的人，把这些学科中的奇数、偶数、算术、三种角度，以及其他与它们同根同源的概念视为理所当然。他们认为这些概念众所周知。当把这些基本概念作为假设前提后，就不需要对自己或其他任何人再作解释，他们觉得，这些对每个人而言都是显而易见的。基于这种假定，他们立刻着手研究论题中其余的部分，直到得出能获得普遍认同的结论。你还应该知道他们利用了可见的图形，并为之争论，但是在此过程中他们考虑的不是图形，而是图形代表的意义。因此，他们讨论的主题是绝对的正方形和绝对的直径，而不是那些能画在纸上的圆的直径……人们研究的是能看到的事物，它们是绝对存在的具体化的对应物，这种绝对存在不可能被看到，但能被思考。

柏拉图的观点形成了柏拉图主义[52]，柏拉图主义专门讨论了数学的本质。柏拉图主义认为存在某种抽象、持久和不变的客观真相，这种客观真相与我们感知到的、短暂的世界没有关系。根据柏拉图主义的观点，和宇宙的存在一样，数学也是作为一种客观真相存在的。不仅自然数、圆和正方形是真实存在的，而且，虚数、函数、分式、非欧几何学、无限集合，以及与它们相关的各种定理也同样是真实存在的。简而言之，每一个数学概念或者“客观真相”的陈述（稍后定义），无论是已形成的确切的阐述，还是想象中的陈述，以及无数尚未发现的概念和表达，都是绝对的实体，或者说是万物。这些实体既不能被创造，也不会被毁灭，它们独立存在于我们的认识之外。更不用说，这些事物不是物质的，它们存在于一个永恒的、由事物本质构成的世界里，这个世界是完全自洽的。柏拉图主义认为数学家在某种程度上和探险家是一样的，他们只能发现真理，却不能发明真理。在哥伦布或雷夫里·埃里克森（Leif Ericson）发现之前，美洲大陆一直都在那儿。同样，在巴比伦人开始研究之前，数学定理已经存在于柏拉图的世界里了。对柏拉图而言，唯一真实并完全存在的是那些抽象的数学思想和表达形式，在他看来只有在数学世界中才会有绝对的肯定和客观的知识。因此，在柏拉图的观念里，数学与神圣联系在了一起[53]。他在对话录《蒂迈欧篇》（*Timaeus*）中提到造物主利用数学创造了世界，在《理想国》中他再次提到，数学知识是理解神圣形态的一个关键环节。柏拉图没有利用数学公式表达那些可以用实验验证的自然法则。除此之外，柏拉图认为人类所处世界中的数学特性，仅仅是“上帝研究几何学”的产物。

柏拉图还把这种“真实形态”的思想拓展到了其他学科领域，特别是天文学。他主张在真实天文学中“不能打扰天空”，并且不要试图解释可见星辰的排布和明显的运动[54]。不过柏拉图认为真实的天文学是一门研究理想数学世界中运动法则的科学。对于真实的天文学而言，可观察

到的天空只不是一种图示罢了（如同画在纸莎草纸上的几何图形也仅仅是真实图形的示例）。柏拉图对天文学研究的建议被认为是极富争议的，甚至在那些最虔诚的柏拉图主义者中也有不同意见。他的支持者提出，柏拉图的真实意思并不是说真实天文学应当只关注与可观察到的天空毫无关系的理想天空，实际上他认为应当研究天空星体真正的运动，而不是我们从地球上看到的表面上的星体运动。然而，反对者们则指出，严格按照柏拉图观点的字面意思去做的话，会对作为一门科学的观测天文学发展产生巨大阻碍。无论柏拉图对天文学的态度如何，当柏拉图主义意识到数学的基础性时，也就成为领先的信条之一了。

可是，柏拉图的数学世界是否真实存在？如果它存在，那么它究竟在哪里？并且那些所谓的我们这个世界里的“客观真实”的陈述是什么意思？遵循柏拉图主义的数学家是不是只是在表达一种浪漫的信仰？这种浪漫的信仰被认为出自于文艺复兴时期伟大的艺术家米开朗琪罗。根据传说，米开朗琪罗相信他所有的雕塑作品事实上已经存在于大理石中了，他的工作不过是把它们表层的覆盖物揭掉而已。

今天，柏拉图主义者（是的，他们绝对存在，后续的章节会详细讨论他们的观点）坚持认为数学形式的柏拉图世界真实存在，并且还提供了他们认为真实存在的关于客观真实的数学表达的有力证据。

让我们看看以下这个很容易理解的命题：所有比 2 大的偶数都可以表示为两个质数（只能被 1 和它自己整除的数）之和。这个听起来十分简单的陈述就是著名的哥德巴赫猜想，之所以被称为“哥德巴赫”，是因为类似的说法最早出现于普鲁士业余数学家克里斯汀·哥德巴赫（1690—1764）在 1942 年 6 月 7 日所写的一封信里。你可以很轻易地验证猜想中前几个偶数的正确性，如 $4=2+2$、$6=3+3$、$8=3+5$、$10=3+7$（或 $5+5$）、$12=5+7$、$14=3+11$（或 $7+7$）、$16=5+11$（或 $3+13$）。这个表达是如此简单，甚至英国数学家哈代都声称“傻瓜都能猜出来”。事实

上，在哥德巴赫之前，法国数学家、哲学家笛卡儿已经预言了这个猜想。然而，证实这个猜想却绝非易事。中国数学家陈景润在 1966 年取得了重要进展。他证明了任何一个足够大的偶数都是两数之和，并且其中一个是质数，另一个至多有两个因子。截至 2005 年，葡萄牙研究员托马斯·奥利维拉·席尔瓦（Tomás Oliveira e Silva）证明，对于小于或等于 3×10^{17}（30 万万亿）的数，该猜想都是正确的。尽管有许多天才的数学家都为哥德巴赫猜想付出了巨大努力，但直到本书撰写前，该猜想仍未得到完全证明，甚至 2000 年 3 月 20 日至 2002 的 3 月 20 日之间，曾有人悬赏 100 万美元（帮助出版小说《彼得叔叔和哥德巴赫猜想》[55]），也未产生预期效果。这就引出了一个本质性问题，数学里的“客观真相”究竟表达的是什么意思？设想如果到了 2016 年，通过严格的数学推理，证实该猜想是正确的，那么我们是否能说当笛卡儿第一次思考这个猜想时，它就已经是正确的了？许多人会认为这个问题有点儿愚蠢。很明显，如果一个命题被证明是正确的，那么这个命题总是正确的，甚至在我们知道它将是正确的之前，它也是正确的。让我们再来看一个貌似更加简单的加泰罗尼亚猜想。数字 8 和数字 9 是连续的整数，并且每个数字都是纯幂数，也就是说 $8=2^3$，$9=3^2$。1944 年，比利时数学家尤金·查尔斯·加泰罗尼亚[56]（Eugène Charles Catalan，1814—1894）猜测在所有可能的整数幂中，唯一一对连续的数字就是 8 和 9（0 和 1 除外）。换句话说，你可以用你一生的所有时间把所有的纯幂数写下来，但是除了 8 和 9 之外，你不会发现其他任何两个幂数相差为 1。1342 年，法国的犹太人哲学家和数学家莱雅·本·格尔森（Levi Ben Gerson，1288—1344）的确证明过该猜想的一小部分，他证实 8 和 9 是唯一相差 1 的 2 和 3 的幂数。1976 年，数学家罗伯特·泰德曼（Robert Tijdeman）向前迈出了一大步。直到那时，加泰罗尼亚猜想的证明已经困扰那些最优秀的数学家们近 150 年了。最后，2002 年 4 月 18 日，罗马尼亚数学家布莱达·米哈伊列斯库

(Preda Mihailescu) 提供了该猜想完整的证明。他的证明过程于 2004 年发表，目前已经得到完全认可。你可能还会问：加泰罗尼亚猜想究竟是什么时间才真正成为正确的命题？是 1342 年？1844 年？1976 年？还是 2002 年？抑或 2004 年？加泰罗尼亚猜想本来就是正确的，只是先前我们并不知道它是正确的，这难道不是很明显吗？这些问题就是柏拉图学派所指的"客观真相"。

有一些数学家、哲学家、认知科学家[57]，以及其他一些数学"消费者们"（例如，计算机专家）认为柏拉图的世界是过于空想的头脑幻想出来的虚构事物（在本书以后的章节中，我还要详细讨论这种观点和其他与之相关的一些观点）。事实上，在 1940 年，著名的数学历史学家艾里克·坦普尔·贝尔（Eric Temple Bell，1883—1960）作出了如下断言[58]：

> 根据预言，柏拉图数学理想世界的最后一个信徒将在 2000 年与恐龙为伍。如果剥去永恒论神秘主义的外衣，数学被认为自它诞生之日起就是人类发明并由人类构建的一种语言，并且用于人类自己为其设定的目标。最后一座绝对真相之塔就这样消失不见，它里面原本就空空如也。

贝尔的预言已经被证明是错误的了。当完全反对柏拉图主义的各种信条出现时，它们并未赢得所有数学家和哲学家的认同，至今这些反对派之间仍有分歧。

假设柏拉图主义在我们今天这个时代赢了，而且我们都成为了虔诚的柏拉图主义者，柏拉图主义真的能解释在人类认识周围世界的过程中，数学那种"无理由的有效性"吗？不能。为什么物理现实活动要遵循抽象柏拉图世界中的法则呢？这曾经是彭罗斯感到困惑的一个问题，而彭罗斯本人也是一名虔诚的柏拉图主义者。因而，此刻我们不得不接受这

样一个事实：即使我们接受了柏拉图主义，对数学能力的疑惑，仍然没有得到解决。按维格纳的话说："很难否认我们正面对着一个奇迹，其神奇之处就像人的思维可以串起成百上千条论据而不致于陷入矛盾。"

为了完整准确地理解这种奇迹的伟大和重要，我们还必须深入研究那些带来奇迹的人，包括他们的生平和他们所留下的遗产，也就是隐藏在那些精确得令人难以置信的数学规律后面的光辉思想。

第3章

魔法师：大师和异端

与《十诫》不同，科学并不是上帝赠予人类、上面已经刻着明确内容的石板，科学的历史是由不计其数的推测、假设、模型在正确与错误之间经历了无数次起起落落的故事构成。许多看起来十分精妙的理论，最终却被证实是错误的，或者走入了死胡同。一些在当时被认为是绝对正确的理论，随着后来不断的实验和观察，却被证明有错，并最终成为完全过时的理论。甚至是那些人类历史上最聪明的几个头脑所发现和总结的概念，也免不了不断地被置疑。例如，伟大的亚里士多德就认为，石头、苹果或其他重物都向下坠落，是为了回到它们自然的家园。按照亚里士多德的观点，它们的家园就是地心，所以当它们越接近地面，离“家”也就越近，那种发自内心的喜悦会使它们下落的速度越来越快。另一方面，空气（和火），因为它们自然的家园是天空，所以它们会向上漂动。在亚里士多德看来，任何物质都能根据它与万物基本成分——土、火、空气和水之间可觉察到的关系，来确定它的自然属性，按亚里士多德的话说[59]：

> 有一些物质完全是自然的，而剩下的所有物质则各有其自己的起源。那些自然的物质，例如，土、火、空气和水，与其他非自然的物质有明显差异。这是因为在这些自然物质的内部都存在着运动和静止的法则……属性就是自然物质运动与静止的法则和原因……与自然相符的事物除包含上述物质本身外，

也包含所有属于这些物质的固有属性，例如，向上运动就是火的固有属性。

亚里士多德甚至试图总结出这种运动的数学公式，他声称质量大的物体下落的速度要更快一些，而且物体下落速度与它自身重量成正比。也就是说，两个同时下落的物体，如果其中一个是另外一个重量的两倍，那么前者下落速度是后者下落速度的两倍。我们的日常生活经验似乎证明这条定理是正确的，一块砖头确实要比和它在同一高度下落的一根羽毛更早落地。亚里士多德从来没有精确地验证过他的这个定量表述是否正确，他甚至还认为，没有必要验证重的物体下落速度是不是真的是一半重量的同种物体下落速度的两倍。然而，更富有实验精神、更重视数学定量分析的伽利略（1564—1642），对于砖块和苹果下落时的那种“快乐”不感兴趣，也正是他第一个公开站出来，指出在这个问题上亚里士多德完全错了。伽利略利用巧妙的思想实验[60]，证明亚里士多德的定律在逻辑上前后矛盾，因而是毫无意义的，根本不可能成立。伽利略的思想实验过程是这样的：假设我们手头有两个质量不一的物体，把它们绑在一起后，从高处把这个组合体扔下来，那么它们下降的速度比其中任何单独一个下落时快多少？一方面，很明显这个组合体肯定要比这两个物体任何单独的一个质量都大，根据亚里士多德的定律，它下降的速度应当比质量大的那个物体单独下落时更快；但另一方面，因为轻重不一的两个物体被捆在了一起，质量小的物体会影响质量大的物体下降时的速度，也就是说会使重的那个物体下落速度变慢，同样根据亚里士多德的观点，绑在一起后下落的速度应当是两个单独下落物体速度的某个中间值。这样，这两个速度值都是从亚里士多德的定律推导出来的，但是却是两个相互矛盾的结论。事实上，今天我们都知道羽毛比砖头下落要慢的唯一原因是羽毛承受的空气阻力更大，如果它们是在真空的环境下，在同样的高度被同时放开，两者将会同时落地。这一事实已经在众多实

验中得到了证实，其中最疯狂的一个实验是宇航员大卫·兰道夫·斯科特在宇航飞船阿波罗15号上所做的。斯科特是人类历史上第7位在月球上行走的人。当登上月球后，斯科特一手拿着一把铁锤，另一手拿着一根羽毛，然后两手同时松开。由于月球上没有空气阻挡，铁锤和羽毛的确同时落在了月球表面上。

值得深思的是，亚里士多德关于物体运动的这条错误定律，被人类接受并得到广泛认可的时间竟然长达近两千年！为什么这样一条有明显漏洞的定理，人们竟然相信并坚持了这么久的时间？这是“完美风暴”（Perfect Storm）的一个典型例子。3种不同力量交织在一起创造了这样一条不容置疑的教条。首先，在没有精确测量的情况下，一个非常简单的事实是，亚里士多德的运动定律看上去似乎和以人类经验为基础的常识相一致，这自然就会使人们很轻易地就接受了它，例如，一张纸莎草纸在空中会盘旋着缓缓下落，而捆在一起的一沓纸莎草纸却会很快落到地上。而通过伽利略那天才般的思想实验，我们才知道了人类常识会被自己的视觉、听觉和触觉所误导。其次，亚里士多德有着几乎无人能与之匹敌的崇高声望，是一位学术权威，毕竟，他是现代西方文明最主要的奠基人。无论是有关所有自然现象，还是有关最基础的伦理学、形而上哲学、政治学，甚至是艺术，亚里士多德都进行了广泛而深入的研究，并且成果丰硕。在这样的巨人面前，很少有人能鼓起勇气挑战他的权威。但这还不是全部的原因，在某种程度上，可以说是亚里士多德教给了我们思考的方法，正是亚里士多德第一次将正式的逻辑学引入了我们的思维。今天，甚至是那些刚刚进入学校学习的小学生都知道亚里士多德是历史上人类思想领域的先驱，了解他那近乎完备的逻辑推导体系[61]，也就是他著名的三段论方法：

1. 每位希腊人都是人；

2. 每个人都终将难免一死；

3. 因此，每个希腊人最后都会死亡。

亚里士多德这条不正确的运动定理能保留这么长时间的第三个原因是，基督教将亚里士多德的这条定理作为教会官方的正统信仰广泛宣传，这让那些试图质疑亚里士多德理论的人为之望而却步。

尽管亚里士多德在逻辑推理的系统化方面作出了巨大贡献，但他并不是因数学上的成就而闻名的。可能让人费解的是，这位建立了科学体系的哲学家——就像把一个大型企业治理得井井有条的总经理，却不是太关心数学（可以肯定的是，至少没有柏拉图那么关心），在物理学上也没什么成就。亚里士多德虽然承认在科学研究中数字关系和几何关系的重要性，但依然把数学当做一门与物理现实分离的抽象的学科。这种认识方式带来的后果就是，尽管毫无疑问亚里士多德是一位智力强人，但他并没有被列入我所提出的那张“魔法师”的人员名单中。

这里我用了“魔法师”这个词，指那些能从空空如也的帽子中拽出一只兔子的人，那些发现了过去从未被思考过的数学和自然之间联系的人，那些能够观察复杂的自然现象并从中提炼抽象出如水晶般晶莹剔透、简单易懂的数学规律的人。在某些情况下，那些卓越的思想家们也会通过实验和观察促进数学研究。如果没有他们，也许数学在解释自然时的“无理由的有效性”这类问题永远不会被发现，而这个谜直接出自那些研究者们神奇的洞察力。

没有哪一本书能为那些在帮助人类认识宇宙、理解规律方面作出突出贡献的卓越科学家和数学家给予完全公正和客观的评价。在本章和下一章中，我将把笔墨主要集中在过去几个世纪以来最杰出的 4 个伟大人物身上。毫无疑问，他们都是科学世界里的精英。在我的这张“魔法师”列表中，排在第一位的这位魔法师因为一件不同寻常的事件而被人们记住了——他竟然光着身子从家里冲向了大街。

给我一个支点，我将撬起地球

数学历史学家埃里克·坦普尔·贝尔在评选人类历史上最有成就的3位数学家时总结道[62]：

> 任何一个人在罗列人类历史上“最伟大”的3名数学家时，都会把阿基米德包括在内。另外两位可以与他比肩的人会是牛顿（1642—1727）和高斯（1777—1855）。如果考虑到这几位巨人各自所生活的时代数学与物理学的发展成果（研究起点的高低），并且根据时代背景来评价他们所取得的成就的话，阿基米德就会被毫无争议地排在第一位。

阿基米德（公元前287—前212，图3-1展示的半身像据说就是阿基米德的形象，但实际上这座雕像可能是某位斯巴达国王）的确是他那个时代的牛顿和高斯。他是如此光彩夺目、富于想象、明于洞察；以致于和他同时代的人以及他之后的几代人，每当提到他的名字时都满怀敬畏和崇拜。尽管阿基米德最为人所称道的是他在机械制造方面的天才和那些匪夷所思的发明，但是实际上，阿基米德首先是一位数学家，他在数学领域的成就至少领先同时代的人一个世纪。今天我们对阿基米德早年的生活和他的家庭所知甚少。据说关于阿基米德生平事迹的第一部传记是由赫拉克利德斯（Heracleides）所撰写的[63]，但不幸的是，这部著作并未流传下来。我们今天所能了解的关于阿基米德的生平，以及他被残害的细节，全部来自于罗马历史学家普鲁塔克（Plutarch）。普鲁塔克（约46—120）事实上对罗马将军马塞卢斯（Marchellus）军事上的成就更感兴趣[64]。马塞卢斯在公元前212年攻占了阿基米德的家乡锡拉库扎城（Syracuse），这件事对阿基米德本人而言是一大不幸，但对于数学史而言，却是一大幸事。阿基米德在马塞卢斯围攻锡拉库扎城时，给马塞卢斯带

来了巨大的麻烦和困扰，这一事件甚至使得当时 3 位最主要的历史学家普鲁塔克、波利庇乌斯（Polybius）和李维（Livy）都无法忽视阿基米德在这场战争中的存在。

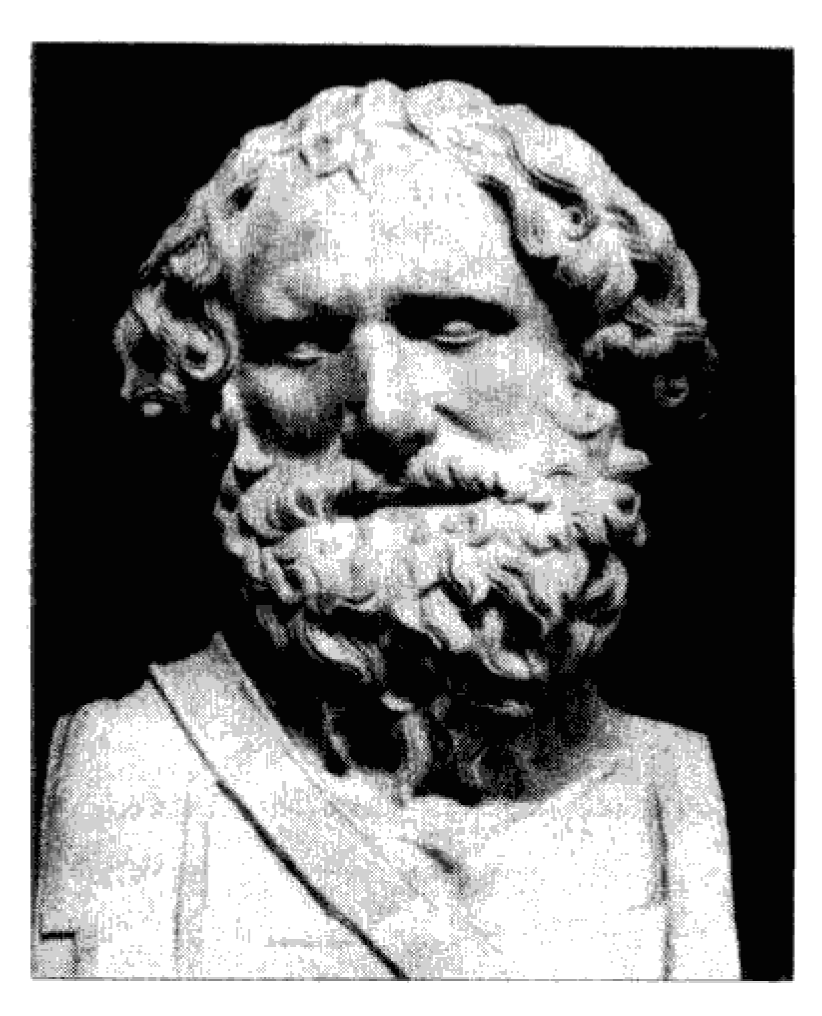


图 3-1

阿基米德出生于锡拉库扎[65]，后来移居希腊西西里岛。根据阿基米德本人证实，他的父亲菲迪亚斯（Phidias）是一位天文学家，我们只知道他曾估算了太阳和月亮直径的比率。也有传言说阿基米德的身世和国王希耶罗二世（Hieron Ⅱ）有关，阿基米德是一位贵族与一位女奴的私生子。不论阿基米德是否真的与皇室有关系，国王希耶罗二世和他的儿子盖隆（Gelon）对阿基米德一直都十分尊敬。在阿基米德年轻的时候，他在亚里山大度过了一段时光[66]，在那里他学习到了一些数学知识，之后他返回了锡拉库扎，全身心地投入了数学研究中。

阿基米德是一位真正的数学家。根据普鲁塔克的记载："他认为所有实用艺术都是丑恶和不光彩的，他只追求那些美丽的、与人类日常需要

无关的东西。”阿基米德全神贯注地研究抽象数学，在这上面他耗尽了几乎所有的精力，其热情远远超过了那些专门从事这门学科的研究者。以下这段文字仍然来自普鲁塔克的记录：

> 阿基米德好像不断地被塞壬[①]所诱惑，而且这种诱惑似乎总与他相伴。他废寝忘食地工作，哪怕在他被强迫去洗澡和施以涂油礼时，他也会在灰烬上或用他的手指在涂满油脂的身体上描绘几何图形（这种情况常常发生），他为数学心醉神迷，他是缪斯女神真正的奴隶。

尽管阿基米德本人对应用数学十分轻视，并且对自己的机械发明也不太看重，但正是阿基米德那些天才的、数量众多的发明为他赢得了声誉，甚至远远超过了他在数学上的声望。

关于阿基米德的众所周知的传奇故事，进一步强化了他作为一个数学家的那种心不在焉的形象。以下这个笑话最早是由公元前 1 世纪罗马建筑学家维特鲁维奥（Vitruvius）讲述的，故事里的国王希耶罗二世想确切地知道他的王冠是不是真是由纯金所打造的。工匠们把制作好的王冠交给国王本人时，王冠重量与最初给他们的金子的重量是完全一致的，尽管如此，国王仍然怀疑有一部分金子被工匠给偷偷换成了同等重量的银子，但是国王想不出有什么办法能在不破坏王冠的情况下证实他的怀疑。他想到了数学大师阿基米德，于是向他请教。阿基米德在接受国王的委托后，冥思苦想了好几天仍然没有想出解决方法。直到有一天，阿基米德去洗澡时，他的脑子里仍然不停地思考这个问题，想着如何才能揭开工匠在王冠上所做的手脚。当他的身体浸入水中后，浴缸中多余的

---

① Siren，古希腊神话中一种半鸟半人的妖怪，用美妙的歌声引诱航海者，使其触礁而毁灭。——译者注

水从缸边缘漫了出来，阿基米德突然意识到，正是他的身体代替了浴缸中原来的一部分水，这马上激发了他解决这个问题的灵感[67]。阿基米德兴奋得不能自已，甚至于忘了自己正在洗澡。他马上从浴缸里跳了出来，光着身子冲到了大街上，嘴里大喊着："尤里卡，尤里卡！"（我找到了，我找到了！）

阿基米德另外一项为众人所知的事迹是他发表了那句著名的宣言："给我一个支点，我将撬起地球。"如果你在 Google 上搜索这句话，就会发现有超过 150 000 个页面与这句话有关。这句看上去十分大胆的誓言，听起来有点像一个庞大组织的理想声明。托马斯·杰斐逊（Thomas Jefferson）、马克·吐温（Mark Twain）、约翰·肯尼迪（John F Kennedy）都曾在不同场合引用过它，拜伦勋爵甚至有一首诗歌的主题就是这句话[68]。很明显，这句宣言是阿基米德在研究如何用给定的力量移动给定重量的物体时得出的结论。根据普鲁塔克的记载，国王希耶罗二世曾要求阿基米德用很小的力量拖动一个非常重的物体，他想用这个问题让阿基米德证明他的天才和智慧。事实上，阿基米德的确办到了，他利用一组滑轮，把一艘载满货物的货船拖入了大海。普鲁塔克用一种崇拜的语气写道："阿基米德平稳、安全地拖着货船，就好像那艘船自己在移动一样。"还有其他一些人记述了这个故事，当然具体内容稍有出入。虽然今天我们很难相信阿基米德能利用他那个时代的机械装置，把一艘船真的拖入了大海，但这些传奇故事至少告诉我们，阿基米德的确发明了一些令当时的人们感到不可思议的装备，通过它们可以用很小的力量移动质量很大的物体。

阿基米德还有其他许多在和平年代所用的发明。例如，他曾发明过一种液压器械把水从低处送到高处，还有一种能观察天空星辰运动的天文仪。但是在历史上，阿基米德最著名的发明，还是那些在抵抗罗马入侵锡拉库扎城时锡拉库扎人所使用的守城器械。

人类的历史就是战争的历史。罗马在公元前 214 年至公元前 212 年围攻锡拉库扎城的战事，被许多历史学家记载进了编年史。因为罗马军队统帅马库斯·克劳迪乌斯·马塞卢斯（Marcus Claudius Marcellus，约公元前 268—前 208）具备卓越的军事才能，并且过去具有非凡的战绩，在战前人们就普遍认为这场战役会很快取得胜利。但是很明显，他低估了在一位数学家同时也是机械天才的帮助下，国王希耶罗二世和锡拉库扎人民的抵抗意志。普鲁塔克生动地描写了在阿基米德守城器械打击下，罗马军队所遭受到的重创：

> 他（阿基米德）迅速指挥守城部队向攻城的罗马人投掷各种武器，巨大的石块落地时发出震耳欲聋的巨响，在这种高强度的打击下，没有一个人还能站稳，所有罗马士兵都乱成了一团，军队的进攻队形完全被打散了。与此同时，从城墙上还伸出了一些非常粗大的长杆，它们伸出墙头的一端被高高举起，然后迅速地下落，只要挨上一下这股巨大的力量，海面上罗马人的战船就被击沉了。另外一些长杆顶端则装有铁抓或像鹤嘴一样的吊肩，它们伸到战船上方，抓住战船的甲板，把它整个按入海里。有一艘船被吊肩抓住后举到了高高的空中（这真是太恐怖了），它被前后使劲晃动，船不停地打着转，直到船里所有的水手都被甩了出去之后，又被重重地砸向了岸边的岩石。

阿基米德的发明让罗马人吃尽了苦头，以致于“他们（罗马士兵）只要看到墙头上哪怕只是抛出一根绳子或伸出一根长杆，就会惊恐地大喊‘它又来了’，这表明阿基米德正在发动守城器械，罗马士兵们立刻溃退并四下逃窜”。甚至是马塞卢斯也感到束手无策，他对他的参谋团队抱怨道：“我们能停止与这个几何布里阿瑞奥斯[①]之间的敌对吗？他神态悠

① Briareus，古希腊神话中的百肩巨人，是乌拉诺斯（Uranus）与盖亚（Gaia，大地女神）之子。——译者注

闲地坐在岸边，在我们愤怒的目光里把我们的战船当玩具一样上下抛来抛去，还把大量的巨石扔到我们的头顶，对此我们却无可奈何。”

根据另外一个广为流传的传说，阿基米德还把许多镜子集中起来，用这些镜子聚焦后的太阳光照射罗马战船[69]，最终把罗马人的战船给点燃了，这个故事似乎最早是在希腊名医伽林（Galen，约 129—200）的著作中出现的。公元 6 世纪，拜占庭拉勒斯的建筑师安提米乌斯（Anthemius），以及公元 12 世纪的一些历史学家们也记录了这个匪夷所思的传奇，但是这项神奇技术是否真实可信，至今仍有不少人表示怀疑。不过，这些有点像神话传说的故事至少为我们提供了有力的证据，它说明阿基米德的确是一个“聪明的人”，他的事迹被几代人所传颂。

我在前面提到过，尽管阿基米德被马塞卢斯当成了“几何学上的百肩巨人”，但他本人并不认为他的守城发明有多么神奇、多么重要，他可能仅仅把它们当做自己在几何学上一时兴起的游戏之作。不幸的是，这种泰然态度最终要了他的命。当罗马人最终攻占锡拉库扎城时，阿基米德正全神贯注地在一个布满灰尘的盘子上画几何图案，根本没有注意到战争的喧嚣。根据后来的记载[70]，当一名罗马士兵命令阿基米德站起来跟他去见他们的统帅马塞卢斯时，这位老人有点不耐烦地回嘴道：“老兄，离我的几何图案远点儿！”这个回答激怒了这名士兵，愤怒战胜了理智，他完全忘记了指挥官下达给他的特别命令（要把阿基米德安全地带回去）。他抽出了自己的佩剑，向这位历史上最伟大的数学家砍去。图 3-2 展现了这位“大师”生命中的最后一刻，这幅作品是在赫库兰尼姆（Herculaneum）发现的，它被认为是公元 18 世纪的一幅马赛克仿作。

阿基米德的死亡标志着数学史上一个伟大时代的终结，正如英国数学家、哲学家怀特黑德[71]评论的那样：



图 3-2

> 阿基米德死于一个普通的罗马士兵之手，这标志着一个最重大的世界变革。罗马人虽然强大，但他们却为实用主义所累，缺乏创造性思维，他们没有足够的想象力得出全新的观点，而这原本能给予他们更多控制自然的基本力量。没有一位罗马人会因为全神贯注于数学图形的沉思而失去生命。

虽然我们对阿基米德的生平所知甚少，但是他的大部分（并非全部）不可思议的手稿却保留下来了。阿基米德有一个习惯，他喜欢把他在数学上的发现用小纸条的方式送给他数学上的朋友或者他所尊敬的人。这个相对比较封闭的圈子包括萨摩斯岛的天文学家康诺（Conno）、昔兰尼的数学家埃拉托色尼（Eratosthenes），以及国王希耶罗二世的儿子盖隆。在康诺去世后，阿基米德与康诺在贝鲁西尼的学生多西修斯（Dositheus）进行交流。

阿基米德的著作内容涵盖了数学和物理学两大领域[72]，这真是令人震惊。而且，在这些领域中，他都取得了非同凡响的成就。他给出了一种通用的数学计算方法，来计算各种平面图形的面积，如圆的面积，还有螺旋和抛物线的弦，以及由多种曲面形成的封闭空间的体积（指圆柱、圆锥，和其他一些诸如抛物线、椭圆、双曲线等曲线旋转后围成的图形）。他还计算出了数字π的值，它是指圆周长与直径的比。根据阿基米德的计算，π比$3\frac{10}{71}$要大，但比$3\frac{1}{7}$要小。在阿基米德的时代，没有一种方法能清楚并直观地表示非常大的数字，为此，阿基米德发明了一种计数系统，不仅能记录任意大的数，还可以操作任意大的数。在物理学上，阿基米德发现了浮力定律，从此流体静力学诞生了。他还计算了许多固体重心的位置，并以数学公式表达了杠杆原理。在天文学上，他通过观察确定了一年的时间，计算了行星间的距离。

许多古希腊数学家的工作都被认为源自于阿基米德，或者只是对他的理论进行了细节的充实。除此之外，阿基米德的推理方法让他远远超越了同时代所有的科学家。这里我只举 3 个有代表性的例子来证明阿基米德工作的开创性。第一个例子乍看起来没有什么特殊之处，只是能让你感觉到阿基米德是一个很好玩并极有好奇心的人，但是如果深入分析的话，就会发现阿基米德灵魂深处那种寻根问底、探寻事物根本的可贵品质。另外两个例子证明了阿基米德的思想已经领先于他所处的时代，这使他立刻进入了我称为“魔法师”的名单，并成为其中不可或缺的一员。

很明显，阿基米德对大数字非常着迷。但是，如果用普通的表达方式记录那些非常大的数字时会极不方便（例如，美国政府在 2006 年 7 月的债务是 8.4 万亿美元，如果你想在个人支票上写下这个数字的话，试想一下吧，数字 84 后面的那几个零要占据多大的空间）。为此，阿基米德发展出了一种全新的计数方式，能十分方便地表示有 80 000 万亿个位

数的数。随后，在他的一本名为《数沙器》（*The Sand Reckoner*）的著作中，他就使用这种计数方式计算了世界上所有沙粒的数量值，这也表明了沙粒的数量并非像过去那样被认为的是一个无限数字。

即使是这本专著的前言也是极具启发意义的，这里我只是简单复述其中的一小部分（这是阿基米德写给国王希耶罗二世的儿子盖隆的）：

> 殿下，由于沙粒的数量太过于庞大了[73]，所有一直有人认为其数量是无限的。这里我所指的沙粒，不但是锡拉库扎城和西西里岛其他地方的，还包括所有人类已经涉足的地区里那些发现或未被发现的沙子。也有些人并不认为沙子的数量是无限的，但是他们认为到目前为止，没有任何一个数字，能被用来表示这类十分巨大的数量。很明显，持有这种观点的人，如果让他们想象一下有一个和地球体积一样大的沙堆，就好像地球的海洋里和山谷全部被沙粒所填满，地面上的沙子也堆得和山脉一样高，这样一个巨大沙堆里的沙粒数量可能远远超过了他们所能认知到的最大的数量，甚至可能还要大许多倍。不过，这里我要介绍一种方法，它利用了几何学中的一些知识，这种方法我已经在给宙克西斯帕斯（Zeuxippus）的信中与他交流过了（这份文档已经不幸遗失了）。通过该方法，不仅能够表示我在上文中提到的那个把地球上所有海洋、山谷全部用沙子填平，高山峻岭全部由沙子堆砌而组成的大沙球体沙粒的数量值，甚至就是整个宇宙全部都用沙子填满后，也能通过这种方法表示出沙粒的数量。现在您可能已经意识到“宇宙”实际上就是大多数天文学家命名的一个球体，正如您从天文学家那里了解到的，宇宙的中心就是地球的中心，它的半径就是地球中心与太阳中心之间的直线长度，这些都是通常的理解。但是萨摩斯的

阿瑞斯塔克斯（Aristarchus）新近写了一本书，里面提到了很多猜想，其中最主要的一个猜想还引出了一条推论，那就是真实宇宙要远远大于我们目前所以为的大小。他认为太阳和恒星都保持固定不变，而地球围绕太阳作圆周运动，太阳则位于这个圆周轨道的正中。

在这段文字中，阿基米德表达了两个重要的观点：第一，他敢于大胆质疑哪怕是最主流的信仰（例如沙粒的数量是无限大的）；第二，他尊重地对待阿瑞斯塔克斯的日心说理论（后来在另一本著作中，阿基米德的确改正了阿瑞斯塔克斯所提出的一个猜想）。在阿瑞斯塔克斯的宇宙观里，地球和行星围绕位于宇宙中心、并且保持固定不动的太阳运动（请注意，这个模型要比哥白尼早 1800 年）。在稍作评论之后，阿基米德通过一系列逻辑步骤，说明了沙粒问题的解决方案。首先，他估算了如果把沙子一粒紧挨一粒地排列起来，覆盖一颗罂粟种子需要沙粒的数量；接下来，他又估算了需要有多少粒罂粟种子才能摆满一根手指宽度，以及一个体育场的一边（大约 600 英尺）大概需要用多少根手指才能排满；之后，他又计算了如果要想排满一百亿个体育场，所需要的手指宽度数量。通过这种计量方式，阿基米德建立了一种指数体系和概念系统，把它们结合在一起后，就能分类表示那些极其巨大的数字了。根据阿基米德的估计，天空中恒星的数量，至多是从地球上看上去围绕太阳运动的星星数量的一千万倍，由此他计算出如果整个宇宙填满沙子，其沙粒数量大约是 10^{63}（数字 1 之后有 63 个零）。他在给盖隆的信中总结道[73]：

殿下，我能想象得到，对于那些不太了解数学的绝大多数人而言，他们无法相信我所讲的这些。但是，对于那些精通数学知识，并且思考过地球、太阳、月亮，以及整个宇宙的长度

和大小这类问题的人来说，这种方法会坚定他们的信仰。基于这个原因，我认为与您讨论这个话题并非是不恰当的。

《数沙器》中所提出的方法优美之处在于它非常方便。利用这种数沙器，阿基米德可以轻松地从日常事物（如罂粟种子、沙粒和手指）跳到抽象的数字和数学符号，然后又跳回到太阳系甚至是整个宇宙的大小上来。很明显，阿基米德具有某种理智的灵活性，他能充分利用其数学天赋揭示未知宇宙的奥秘，又能用宇宙的特征丰富数学的概念。

阿基米德第二项使之被称为“魔法师”的贡献是他研究问题的思路和方法，正是在这些方法的指导下，他发现了众多领先时代、令人瞩目的几何学定理。甚至在进入 20 世纪之前，对于这些方法以及阿基米德分析问题的一般思维过程，我们的了解仍然极有限，阿基米德简洁的文字表达风格隐藏了许多过程细节和思考线索。直到 1906 年，一个戏剧性的发现推开了阿基米德思维大厦的一小扇窗户，通过这扇窗户，我们才能一窥这个天才思考问题的一般思路和解决问题的一般方法。关于这个发现[74]，其过程可谓一波三折，听起来简直就是意大利作家、哲学家艾诰（Umberto Eco）笔下的历史神话传说。下面我非常简要地描述一下这个过程。

阿基米德重写稿

公元 10 世纪[75]，君士坦丁堡（今伊斯坦布尔）的一位不知姓名的抄写员誊写了阿基米德的 3 本著作：《方法论》（*The Method*）、《十四巧板》（*Stomachion*①）和《论浮体》（*On Floating Bodies*）。这可能代表了当时希腊数学家普遍感兴趣的问题。其中，公元 9 世纪的希腊几何学家利奥（Leo）对此贡献巨大。但是在 1204 年，十字军第四次东征期间，士兵在

① 阿基米德在里面讲了古代孩子玩的一种拼图游戏。——译者注

财政支持的诺言诱惑下洗劫了君士坦丁堡。在此之后的岁月里，人们对数学的热情减退了，西方的基督教和东方的东正教的分裂成为了事实。在 1229 年前，阿基米德著作的这份手抄稿经历了辗转曲折的“悲惨命运”。由于它所用的纸张是上好的羊皮纸，可以被重复利用，因此它们被拆散开来，上面的文字也被清洗干净后，又被重新装订成了基督教徒所用的祷告书。抄写员艾奥奈斯·麦伦那斯（Ioannes Myronas）[76]于 1229 年 4 月 14 日完成了这本祷告书的抄写工作。幸运的是，对原始文本的清洗并没有完全让它们被彻底清除掉，图 3-3 展示了这批极其珍贵的抄写稿中的其中一页，图中手稿里横排书写的文字是祷告书的内容，而竖写的文字则是阿基米德数学著作的内容。一直到公元 16 世纪，这本重写稿——意指重复利用的文档——被圣莎贝思修道院收藏，它位于圣地（巴基斯坦）伯利恒东部。截至公元 19 世纪前叶，这所修道院的图书馆收藏了 1000 多页这种手稿。由于其中的大部分文字都已经十分模糊，阿基米德重写稿被

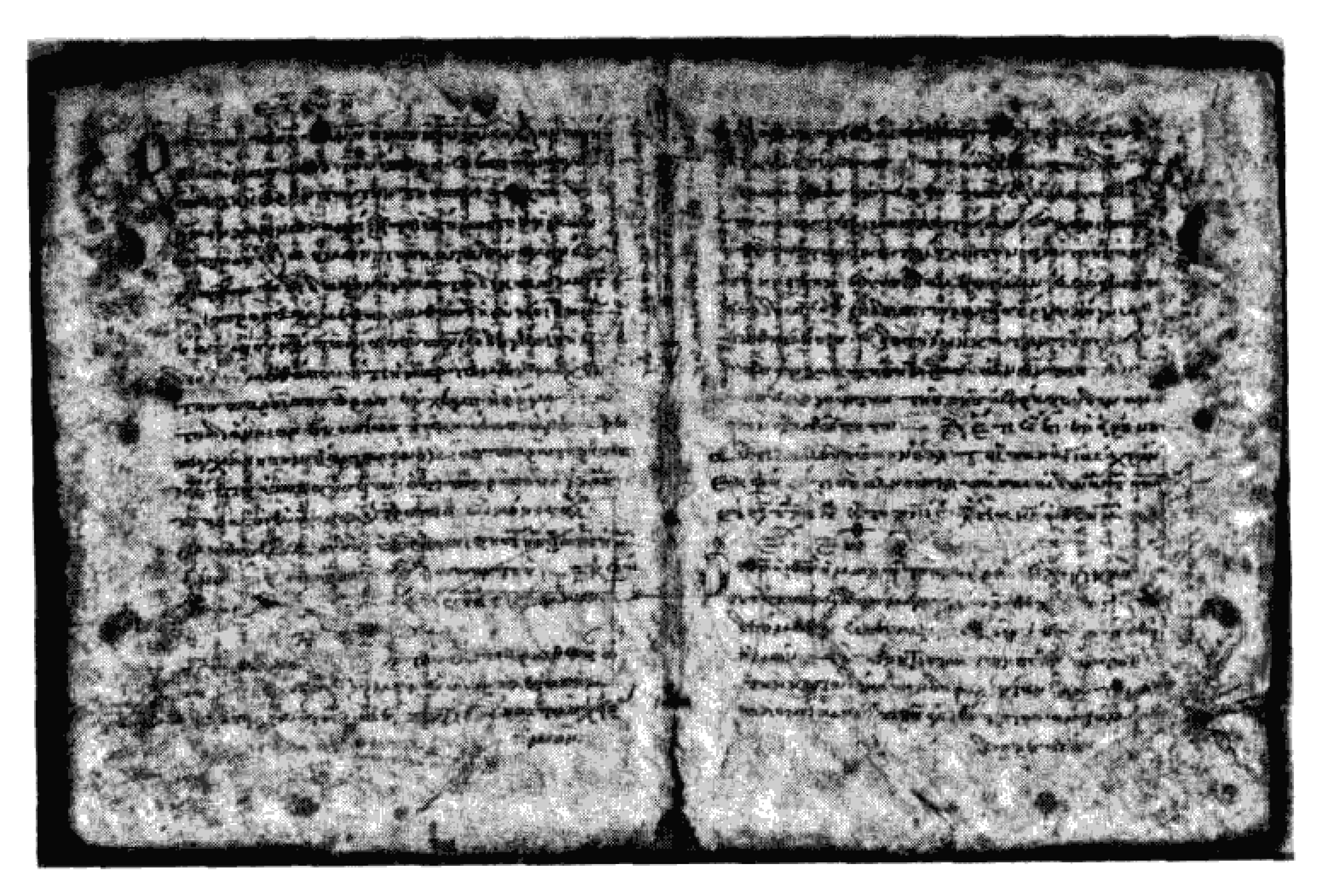


图 3-3

再次送回了君士坦丁堡。大约在 19 世纪 40 年代，著名的德国圣经学者康斯坦丁・戴辛多夫（Constantine Tischendorf，1815—1874）（现存最古老圣经手抄本的发现者）参观了座落于君士坦丁堡的圣墓大教堂（它是希腊礼耶路撒冷宗主教的分院），在那里他第一次看到了这份阿基米德重写稿。戴辛多夫一定是发现了那本祷告书的文字下若隐若现的数学公式，这引起了他极大的兴趣，以致于他竟然想办法从中匆匆偷了一页。1879 年，戴辛多夫的遗产继承人把这页文稿卖给了剑桥大学图书馆。

1899 年，希腊学者 A. 帕帕多普洛斯・柯瑞莫斯（A.Papadopoulos Kerameus）将收藏于圣墓大教堂的所有手抄本进行了分类编目，阿基米德重写稿被编为 Ms. 355 号。帕帕多普洛斯・柯瑞莫斯能够读懂其中的几行数学原文，也许是意识到了它们背后隐藏的重大意义，他把这些数学文字印在了他的编目手册中。这批极为珍贵的手抄本的保留是一个历史性的转折点。这些数学表达式引起了丹麦语言学家约翰・路维・海伯格（Johan Ludvig Heiberg，1854—1928）的注意。海伯格经过仔细辨认后，认为这些文字是属于阿基米德的。在 1906 年他参观伊斯坦布尔期间，又仔细检查了这批手抄本，并为它们拍了照片。经过一年多的认真研究后，他公布了这一震惊世界的发现。其中有两页是在历史上从来没有记载过的，另外还有一页人们只见过它的拉丁文版本。尽管海伯格已经能够阅读，并在后来他所写的一本关于阿基米德著作的书中发表了重写稿的部分内容，他还是未能完全传达阿基米德著作的原意。可惜的是，1908 年后这批手抄稿从伊斯坦布尔神秘地失踪了，后来又突然出现在一个巴黎人家里，而这家主人宣称自从 1920 年起他们就拥有这部手稿了。由于保存不善，阿基米德重写稿遭受了某些不可修复的破坏，而且先前海伯格发现并破译的那 3 页手稿也一起遗失了。另外，在 1929 年后，有人在其中 4 页上画了 4 幅拜占庭风格的图画。最终，拥有阿基米德重写稿的那个法国家庭将它送到了克里斯汀拍卖行进行拍卖，这引起了巨大争议。

关于阿基米德重写稿所有权的争论甚至在 1998 年闹到了纽约联邦法庭，希腊东正教会主教声称这批手抄本是 1920 年左右从教会的一所修道院中被偷走的，但法官最终裁定它们属于克里斯汀拍卖行。随后，阿基米德重写稿于 1998 年 10 月 28 日在克里斯汀拍卖行进行了拍卖，并被一位不愿意透露姓名的买家以两百万美元的价格买走。这位买家将阿基米德重写稿送到位于巴尔的摩（Baltimore，属美国马里兰州）的沃特斯艺术博物馆，在那里工作人员对手稿进行了很好的保养，现代影像科学家使用了早期研究者所无法拥有的工具和装备对它们进行了彻底检查，借助紫外线、多频谱影像，甚至是 X 射线（在斯坦福同步辐射实验室，它们被科学家仔细地分析）的帮助，科学家们已经破解了部分阿基米德重写稿的内容，这些内容过去从来没有人见过。在本书写作期间，对阿基米德重写稿的保护、破译和学术研究还在继续。我非常荣幸地与从事阿基米德重写稿保护与研究的科学小组见了一面[77]，图 3-4 展示的是他们正在准备用各种不同波长的光线照射手稿。



图　3-4

围绕阿基米德重写稿曲折经历展开的戏剧性故事，让我们对这位伟大的几何学家的研究方法有了粗略的了解，但这已经是前所未有的突破了。

《方法论》

当你阅读任何一本古希腊几何学著作时，你都不能不惊叹于那些两千年前就提出的定理和证明的简洁和精炼，并会不由自主地被这种风格所打动。但是，这些书籍通常都不会向你提供一个清晰的思维线索，以让我们能明白这些理论和定理最初是如何构想的。阿基米德那本杰出的专著《方法论》填补了这方面的空白，他揭示了他自己在知道怎样证明之前，是如何确定定理的真实性的。这里有一段文字，它们摘自阿基米德写给昔兰尼的数学家埃拉托色尼（约公元前 276—194）的一封信，在这封信里，阿基米德简要介绍了他的《方法论》的主要内容[78]：

> 我将在本书中向您展示这些定理是如何证明的。我知道，您是一位勤奋和优秀的哲学老师，对任何数学研究都非常感兴趣，所以我认为在这本书里向您详细地说明我所采用的这种特殊的方法是十分合适的，通过这种特殊的方法，您将能借助力学的帮助认识特定的数学问题。我认为这对于发现那些定理的证明更有价值也不无益处。有些问题，最初是通过物理方法认识的，随后却是用几何方法证明的，因为力学方法无法提供真实的证明。这主要是由于解决那些先前已经获得一些相关知识的问题，比起那些事先没有一点背景知识的问题要轻松得多。

在这里，阿基米德触及了在科学研究中和数学发展史上最重要的一个观点——找到“什么是重要的问题或定理”，通常要比解决那些已知的问题或证明已知的定理更加困难。那么，阿基米德是如何揭示新理论的呢？利用他对力学、平衡理论、杠杆原理的深刻理解，阿基米德先在自

己的脑海里与已知物体的体积和图形的面积进行比较，大体估量一下他准备计算的物体的体积和图形的面积。通过这种方式，阿基米德发现从几何学上证明未知物体体积和图形面积就容易多了。随后，在《方法论》中阿基米德指出一系列图形的重心位置并给出了几何证明。

在这里，我们可以从两个方面来认识阿基米德方法的不同凡响之处。首先，从本质上讲，是阿基米德把思想实验引入到了严谨的科学研究之中。公元 19 世纪，德国物理学家汉斯·克里斯汀·奥斯特（Hans Christian Orsted）第一次把这种用虚构的实验代替真实实验的方法定名为“Gedankenexperiment”（在德语中，它的意思是“思考引导的实验”）。在物理学中，这个概念具有很高的地位和价值，思想实验可以用在真实实验之前，让我们能事先了解实验过程。或者在某些情况下，由于缺乏必要条件，真实实验根本没有可能在现实中进行，此时思想实验就有了用武之地，它可以帮助我们理解实验内容。其次，这一点也许更重要，阿基米德把数学从欧几里得和柏拉图等人所打造的人造链条上拆了下来，让它获得了自由。对于欧几里得和柏拉图来说，有一种方式，也仅有这一种方式，可以完成数学工作：你必须从公理出发，利用指定的工具，沿着固定不变的逻辑步骤顺序进行证明。但是，拥有自由灵魂的阿基米德却不甘于被这种方式所束缚，他使用他所能想到的所有方法和证据，提出新问题，并根据自己的思考将它们解决。他毫不犹豫地探索和发展抽象的数学公式、概念（柏拉图的世界）和物理现实（真实的物体）之间的联系，并在这个过程中不断发展他的数学理论。[①]

---

① 阿基米德通过想象比较，由一个已知面积或体积的图形（立体），得到一个未知图形（立体）的面积或体积。在得到了结果之后，他再从纯数学上证明它。作者在这里之所以首先强调这一点，是因为对古希腊人来说，数学的大部分就是几何，而这些被柏拉图制定的一些死板规则所禁锢了。例如，只允许用没有刻度的直尺和圆规作图。柏拉图和他的学派把所有非尺规做的图统称为“非机械”的，并且出于某种神秘的原因，这样的作图是被严令禁止的。而阿基米德是当时唯一不重视柏拉图的古板守旧的几何概念的先驱。单凭这一点，他就值得后人称赞。——译者注

最后一项奠定阿基米德“魔法师”地位的基础并使之更加牢固的成就，是他预测了微积分[79]。微积分是数学的一个分支，是由牛顿在 17 世纪末（几乎与此同时，德国数学家莱布尼茨经过独立研究后也提出了该理论）正式建立和发展起来的。

积分背后所隐藏的基本思想实际上非常简单（当然，是在被指出来之后）。例如，如果你想要计算椭圆上的一段弧与这段弧的两个端点之间的直线所围成图形的面积。你可以把这个图形分解成许多宽度相等的长方形，当把这些长方形的面积相加之后，就得到了所求面积（如图 3-5 所示）。很明显，分解出的长方形数量越多，这些长方形面积和就越接近真实的数值。换句话说，当被分解的长方形数量逼近无限的时候，把这些长方形的面积加起来就得到了你想要计算图形的实际面积。阿基米德所发现的这个极限就称为积分。利用我在上面描述的方法，阿基米德计算了球面、圆锥面、椭圆面和抛物面的面积和由它们形成的实体的体积（把椭圆或抛物面绕它们的轴旋转后得到的）。

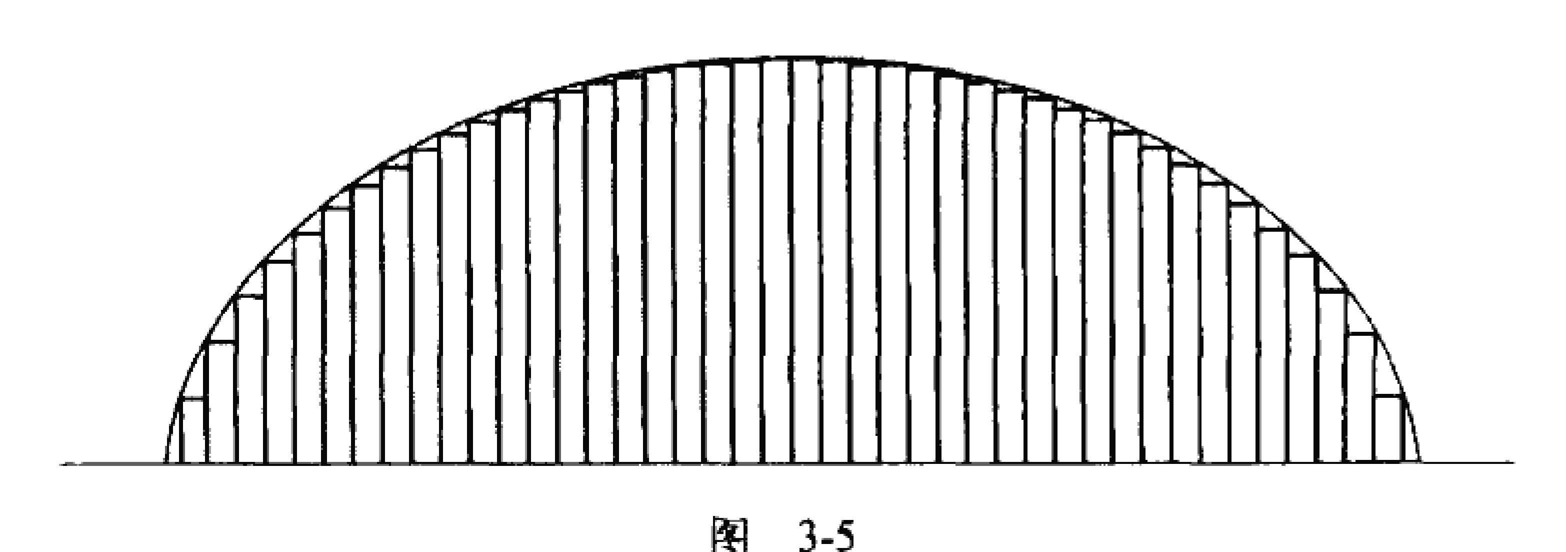


图 3-5

微分的一个主要的目标就是计算曲线上给定一点的切线的斜率，此时这条切线与这曲线只在这一点相交。阿基米德给出了一种特殊螺旋的切线斜率计算方法，对微分更进一步的研究是由牛顿和莱布尼茨完成的。今天，微积分的面积计算以及由此衍生的数学分支是建立绝大多数数学模型的基础，在物理学、工程学、经济学或流体力学中都有广泛应用。

阿基米德改变了数学世界，也从根本上改变了人们对数学与宇宙之间的关系的认识。通过展示数学理论与实践之间令人震惊的紧密联系，阿基米德第一次提出了以观察和实验为基础，而不是靠神秘的臆想来解释自然界中似乎利用数学设计过的各种现象。正是由于阿基米德的努力，人类才孕育出了“数学是宇宙的语言”，以及“上帝是数学家”的思想和认识。当然，也有一些是阿基米德没有做到的。例如，阿基米德从来没有讨论过，如果把他所建立的数学模型应用于实际物理环境中时，可能会存在哪些限制。举个例子来说，在阿基米德关于杠杆原理的理论探讨中，他就没有考虑过杠杆自身的重量，并且还假设他所研究的杠杆硬度是无穷大的。我们可以说阿基米德推开了一扇门（穿过这扇门之后，人类就可以用数学模型解释自然现象），但阿基米德推开的幅度有限，只达到了“挽回面子”①的程度。这种观念就是，数学模型也许仅仅能代表人类所观察到的，而不能描述现实存在的物理世界。希腊数学家格米纽斯（Geminus，约公元前10—公元60）在研究天体运动时，第一个从细节上讨论了数学模型和物理解释之间的差异。格米纽斯[80]指出了天文学家和物理学家的差别，按照他的观点，天文学家（或数学家）的工作仅仅是提出模型构造的建议，这个模型实际上是他们观察到的天空中星体运动的再现，而物理学家的工作则是解释这种真实运动。这种特殊的差别在伽利略的时代达到了戏剧性的白热化程度，在本章的稍后部分我还会继续讨论它。

也许你会感到奇怪，阿基米德本人认为他最杰出的成就是发现了圆柱体内切球体（如图3-6所示）的体积是该圆柱体体积的2/3。阿基米德对于他的这个发现极为自得，甚至于要求将这个发现镌刻在他的墓碑上

---

① 罗马红衣主教贝拉明评价哥白尼日心学说时所使用的语言，在本章稍后会进一步解释这句话。——译者注

作为他的墓志铭[81]。在阿基米德去世后 137 年，罗马著名演讲家马库斯·图利乌斯·西塞罗（Marcus Tullius Cicero，约公元前 106—前 43）发现了这位伟大数学家的墓地，西塞罗对于他的寻找过程有一段相当生动也十分令人感慨的描述[82]：

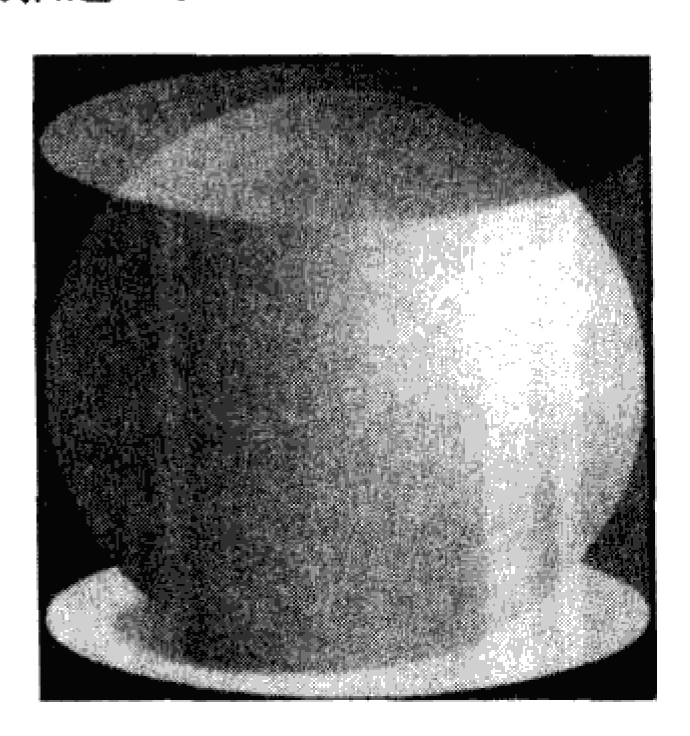


图 3-6

当我在西西里岛任财务官时，我就四处寻访阿基米德的墓地，锡拉库扎人对此一无所知，并且拒绝承认阿基米德墓地的存在。但是，这一小片完全被荆棘覆盖、被灌木所包围的区域，的确是伟大的阿基米德埋骨之所。我曾经听说过几句据说是镌刻在他墓碑上的很短的诗句，这些诗句提到了圆柱体和球体模型。为此，我遍访阿格里根琴门（Agrigentine Gate）附近所有的墓地，逐个查看这些墓地上所立的墓碑。最后，我注意到有一块墓碑经过清洗后，上面可以模糊地发现刻有一个小柱体，在它之上是一个球体和圆柱，我马上意识到并告诉我身边的锡拉库扎人，这就是我正在寻找的目标。我们安排了一些人手用镰刀把四周的杂草清理了一下，并开辟出了一条小路直接通向这座纪念碑。碑上的那些诗句依稀可辨，只不过每句的后半部

> 分已经在岁月的侵蚀下模糊不清了。这座城市是古希腊世界中最著名的城市之一，同时也是过去岁月里伟大的学术中心，却对它曾经诞生过的最光彩夺目的公民的葬身之地完全一无所知，幸亏我这位来自阿尔皮努姆（Arpinum）的人出现了并认出了它！

西塞罗的描述并未夸大阿基米德的伟大。事实上，在用“魔法师”作为标题时，我有意抬高了魔法师的门槛，以伟大的阿基米德为基准，以致我们要向前一跃至少 1800 多年去寻找与阿基米德相比肩的人物。与宣称自己能够推动地球的阿基米德不同，这位“魔法师”坚持认为地球已经在移动了。

阿基米德最优秀的学生

1564 年 2 月 15 日，伽利略・伽利雷[83]（图 3-7）在比萨市出生。他的父亲文哲森(Vincenzo)是一位音乐家，他的母亲朱丽叶・爱玛汀(Giulia Ammannati）是一个风趣的人，颇有点急性子，受不了别人愚蠢的行为。1581 年，伽利略听从了父亲的建议，进入比萨大学的文科系学习医学。然而，他对医学并不感兴趣，相反却十分喜欢数学。在 1583 年的暑假期间，伽利略请托斯坎的宫廷数学家奥斯台利・里奇（Ostilio Ricci）去见见他的父亲，在这次会面中，里奇极力劝说伽利略的父亲，他说伽利略天生注定会成为一名数学家。这个问题事实上很快就被解决了，这位充满激情的年轻人完全被阿基米德的著作所吸引，他说：“凡是阅读了阿基米德著作的人，都会有一种高山仰止的感觉，与阿基米德相比，其他所有人的思想都不值一提，哪怕只是想做些与阿基米德的发现相似的工作也没有多少希望。”[84]当时，伽利略自己并没有意识到，他本人却正是那些为数不多的能与这位古希腊数学大师相提并论的人物之一。受到阿基米德与国王王冠的传奇故事的启发，伽利略在 1586 年出版了一本名叫

《小平衡》（*The Little Balance*）的小册子，在这本小册子里他提出了他所发现的一种流体静力学中的平衡理论。后来，伽利略在佛罗伦萨学院的一次公众演讲中更多地引用了阿基米德的理论。就是在这次演讲中，他讨论了一个极不寻常的题目，那就是但丁在叙事诗《地狱》（*Inferno*）中提到的地狱的位置和大小。



图 3-7

1589 年，伽利略被任命为比萨大学的数学教授，这有一部分得益于德高望重的罗马数学家和天文学家克里斯托弗·克拉维思（Christopher Clavius，1538—1612）的极力推荐。伽利略曾经于 1857 年拜访过他，并马上得到了他的赏识。一颗年轻的数学新星冉冉升起，前途无量。在这之后的 3 年里，伽利略着手进行他的第一项研究，这项研究是关于运动定律的。很明显，在此期间他发表的那些文章，是受到了亚里士多德著作的启发，里面既包含着有趣的思考，也混杂着许多错误主张。例如，伽利略开创性地认识到在检验物体运动定律时，人们可以利用倾斜平面减缓物体运动速度。但是，与此同时他又错误地声称，如果有两个物体

同时从塔上落下，“当刚开始下落时，木球要比铅球下落速度更快”[85]。在某种程度上，伽利略的第一位传记作者文森罗·维维安尼（Vincenzio Viviani，1622—1703）错误地描写了伽利略在这一阶段的爱好和一般思维过程。维维安尼塑造了一个广为流传的形象[86]，在他的笔下，伽利略是一位一丝不苟、不达目的誓不罢休的实验主义者，他对新生事物的敏锐洞察完全来自于他对自然现象仔细的观察。事实上，直到 1592 年伽利略迁居帕多瓦（Padua）之前，他的研究方向和研究方法主要集中在数学领域之中。他信奉思想实验，信奉阿基米德以几何图形的方式对世界的描述，这些几何图形遵循数学的规律。在当时他对亚里士多德最主要的不满是他在后来所讲的：“（亚里士多德）不仅对几何学中的那些深刻和深奥的发现不太重视，甚至对这门科学最基本的规律也不太关注。”[87]伽利略还认为亚里士多德太过于依赖感觉的体验了，“因为它们提供的是客观真相的表象”。事实上，伽利略提出：“在任何时候，都要运用推理而不是实例（因为我们寻找的是结果的原因，而这不会从经验中得出）。”

1591 年，伽利略的父亲去世了，家庭的重担一下子落在了这位年轻人的身上。为了减轻生活压力，他接受了帕多瓦的一个职位，因为在那里他的收入是在比萨大学时的 3 倍。随后的 18 年是伽利略一生中最快乐的时光。在帕多瓦，他认识了马莲娜·甘巴（Marina Gamba），并与她保持了长期的交往，伽利略虽然一直没有娶马莲娜，但他们却育有 3 个孩子：维吉尼亚（Virginia）、利维亚（Livia）和文森罗（Vincenzio）[88]。

1597 年 8 月 4 日，伽利略给著名的德国天文学家约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler）写了一封私人信件，信中他承认自己相信哥白尼学说“已经很长一段时间了”，除此之外，他还提出，许多自然现象如果用地心说来解释的话根本解释不通，但是如果用日心说模型来分析的话这些问题则会迎刃而解。然而，他对哥白尼“看起来似乎被嘲笑，并在观众的起哄声中被赶下舞台”的事实感到哀伤。这封信标志着伽利略与亚里

士多德学派的宇宙论之间的巨大裂痕日益加深。从此，现代天文物理学登上历史舞台，初现端倪。

星际信使

在1604年10月9日的夜晚，维罗纳（Verona）、罗马和帕多瓦的天文学家们惊恐地发现天空中有一颗新星迅速地变亮，其亮度甚至超过了天空中其他所有的星星。气象学家简·布朗诺斯克（Jan Brunowsk），他是专门为皇室提供服务的官方气象学者，在10月10日也看到了这一天文现象，这使他陷入了极大焦虑，并迅速把这一情况通知给了开普勒。连续数日的阴云使开普勒没有办法观察天空，直到10月17日，开普勒才第一次看到这颗星星，从此连续观察了一年左右的时间，并最终在1606年出版了关于这颗“新星”的书。今天我们已经知道，1604年天空中的景象，并不是诞生一颗“新的星星”的标志，而是意味着一颗衰老的“旧的星星”爆炸后的死亡。这一事件，现在被称之为“开普勒超新星”，当时在帕多瓦引起了巨大的轰动。伽利略在1604年10月用肉眼观察了这颗新星，在之后的12月和次年1月，他就此现象在公众面前发表了3次演讲。为声讨迷信思想，伽利略在演讲中提出，这颗新星在天空中的位置（相对于天空中其他恒星）没有明显的移动（视差），说明这颗新星位于月球范围之外。这次观测的重大意义无可估量。在亚里士多德学派的世界里，天空中所有的变化都应当是严格限定在月亮这一边的，比这更远的恒星所形成的球面是不可能改变，也是神圣不可侵犯的。

实际上，这种神圣不可侵犯的球面理论在1572年就已经开始动摇了。当时丹麦天文学家第谷·布拉赫（Tycho Brahe，1546—1601）观察到了另一颗恒星的爆炸，现在我们将它称为“第谷超新星”。1604年的事件实际上是为亚里士多德宇宙论的棺材钉下了另一颗钉子。但是，在理解宇宙方面真正的突破，既不是来自理论推测，也不是通过肉眼观察

得到的。事实上，使用凸面玻璃透镜和凹面玻璃透镜进行的简单的观察实验使人类对宇宙的认识有了真正的突破。人们发现，把凸面玻璃透镜和凹面玻璃透镜放在一条直线上，让两者相距大约13英寸左右，通过这个透镜组看出去，就会发现远处的物体似乎就在眼前，这就是望远镜的雏形。到了1608年，这种观测仪器已经在全欧洲得到迅速普及，有一位荷兰人和另两位法兰德斯光学仪器制造商甚至为它们申请了专利。关于这种神奇仪器的谣言传到了威尼斯神学家保罗·萨比（Paolo Sarpi）耳中，他于1609年3月前后把这个传言告诉给了伽利略。为了在第一时间证实这些信息的真实性，萨比还特地给他在巴黎的朋友雅克·巴都奥瑞（Jacques Badouere）写了一封信，询问谣言是不是真的。按照伽利略自己的说法，他被"渴望看到美丽事物的心情所控制"。后来，伽利略在他1610年3月出版的一本著作《星际信使》（*The Sidereal Messgae*）中叙述了这一系列事件[89]：

> 大约10个月前，我听说一个法兰德斯人制造了一种望远镜，通过它可以把距离观察者非常遥远的物体看得非常清楚。为了验证这种被传得神乎其神的仪器，好像还进行了一些相关的实验，有些人相信它是真的，而也有些人认为这根本不可能。过了几天，法国巴黎尊贵的巴都奥瑞先生给我的来信中证实了它的存在，这让我全身心地投入其中，研究它的工作原理和方式。通过研究我自己也发明了一种与之类似的仪器。我所做的这些研究工作，不久之后就成为了我的光学折射理论的主要内容。

这件事证明了伽利略具备与阿基米德同样的创造性实践思维，这也正是阿基米德性格中的典型特征。伽利略知道望远镜能被造出来后，很快就研究出望远镜的工作原理是什么以及它是怎么制造出来的。不仅如此，在1609年8月到1610年3月期间，伽利略在使用他自己发明的望

远镜观察天空的同时，还在不断地改进它，最终他把自己最初发明的放大倍数大约为 8 倍的望远镜，提升到了放大倍数大约为 30 倍，这本身就需要有相当高超的工程技巧。但是，伽利略真正的伟大之处，不仅仅是他在实践中知道怎么改进这具望远镜，而在于他利用自己所发明的这个增强视力的密闭管来干什么（伽利略称之为 perspicillum）。伽利略制造和改进望远镜的目的，不是观察威尼斯港口外的轮船，也不是检查帕多瓦城市建筑的屋顶，实际上，他把望远镜对向了天空。接下来所发生的事是科学史上前所未有的，正如科学史学家诺埃尔·斯维德劳（Noel Swerdlow）指出的："在两个月的时间里，1609 年的 12 月至 1610 年的 1 月，他的发现改变了世界。过去没有人，今后也不大可能有人能与他相比。"[90] 事实上，2009 年这一年就被命名为国际天文年，以纪念四百年前伽利略对星空的那次观察。伽利略究竟做了些什么使他成为了一位传奇般的不同凡响的英雄？他利用自己制造的望远镜观察取得了许多令世人震惊的成果，这里我只列举了其中的一小部分。

当伽利略把望远镜转向月亮[91]，重点观察月球明暗相交的分界线时——这条线把月亮的黑暗和光明部分区分了开来，他发现这个天体的表面十分粗糙，上面有山脉，有巨坑，也有广阔的平原。他还观察了光线是怎样出现又如何被黑暗吞噬，以及最初那些针尖般的亮点是如何逐渐扩大延伸，就像太阳在地球上升起时驱散山顶的黑暗一样。他甚至利用几何学知识计算了其中一座山峰的高度，根据他的计算，这座山峰至少有四英里高。这还不算完，伽利略观察到月亮黑暗的那部分（当月亮处于新月状态时）并不是完全黑暗，也能被微弱的光给照亮。从这个现象分析，他认为这是由于地球能反射太阳光。正如地球被满月所照亮一样，伽利略确信，月球表面也同样沐浴在地球所反射的太阳光线中。

虽然这些发现并不是全新的，但是伽利略提供的证据将过去的那些与此相关的争论提升到了一个全新的高度。在伽利略之前，天空和地面

之间有明显的区分，也就是说研究天空的理论和研究地球的理论是截然分开的。这种差异不仅仅是哲学上的或是科学上的，大量古代的神话、宗教的教义、浪漫的诗歌、美学的感悟都围绕着天空和地面的差异展开。而现在，伽利略却高声说很多事是我们过去从未想象过的。与亚里士多德学派相反，伽利略把地球和天体（月亮）当做同一类型的天体：两者都有坚固的、起伏不平的表面，它们都反射太阳光。

并不满足于仅仅对月亮的观察，伽利略又将他的目光投向了更远的天体——行星，它们被古希腊人戏称为夜晚星空中的“漫游者”。从 1610 年 1 月 5 日开始，伽利略把他的望远镜转向了木星，令他极为惊讶的是，他发现有 3 颗过去从未被报道过的星星，它们似乎呈一条直线横越过木星，其中两颗在东面，一颗在西面。在之后的几天里，伽利略观察到这几颗与木星有密切关系的星星还不断地变换它们在天空中的位置。在 1 月 13 日，伽利略发现了第四颗与前 3 颗十分类似的新星。经过一周的仔细观察后，伽利略得出了一个令世人震惊的结论，就像月亮是地球的轨道卫星一样，他认为这 4 颗星星实际上是木星的轨道卫星。

所有能给科学史带来巨大冲击的伟大人物，都有一项明显区别于普通人的才能，那就是他们都具有一种深刻的洞察力，能从众多相差无几的结论中迅速地找出究竟哪一项发现才是真正有价值的。另外一项也是许多有影响力的科学家所共同具备的品格：他们能深入浅出地介绍自己的科学发现，并能让其他人很容易就理解他们的观点。伽利略在这两方面都是大师级人物。由于担心可能会有其他人也发现了木星的卫星，伽利略仓促地于 1610 年春天在威尼斯出版了他那本著名的学术专著《星际信使》（*Sidereus Nuncius*）。伽利略十分礼貌而又聪明地把这本书献给了托斯卡纳大公科西莫·梅迪奇（Cosimo II de Medici），并且还把这颗卫星命名为“梅迪奇（Medicean）星”。两年后，在他结束所谓的“亚特兰大的劳力”的身份之后，伽利略计算出了这 4 颗卫星的轨道周期——环

绕木星运行一周所用的时间。今天我们知道，伽利略的计算与真实的精确时间相差不过几分钟。在《星际信使》面世之后，它迅速成为了欧洲市场上的畅销书，首印的 500 本很快就销售一空，这也使得伽利略成为了欧洲大陆上的名人。

发现木星卫星的重要性，怎么强调都不过分[92]。不仅因为这是自古希腊人观察太阳系以来第一次新发现的 4 颗天体，而且仅仅只是这 4 颗星星的存在就足以回击对哥白尼主义最严重的指控了。亚里士多德学派坚持认为地球不可能围绕太阳旋转，因为地球已经有月球在它的轨道上运行了，宇宙中怎么可能有两个不同的轴心呢？伽利略的发现明白无误地表明，行星可以有自己的卫星环绕它运行，并且行星本身同时也在围绕太阳旋转。

1610 年伽利略的另一项重要成就是他观察到了金星的相位[①]。在以地球为中心的学说中，金星被认为是在一个小圆周上运行（本轮），并且它的轨道是围绕地球的。本轮的圆心被认为总是在太阳与地球的连接线上（如图 3-8a 所示，该图仅是一幅示意图，并没有按真实比例绘制）。在这种情况下，当一个人站在地球上观察时，应当看到金星总是以新月的形状出现，并逐渐变圆。但是，在哥白尼的系统中，当人们从地球上进行观察时，金星在太阳那一边从一个小圆盘开始逐渐变大并变暗，当它最大和最暗的时候，就是它距离地球最近的时候（如图 3-8b 所示）。当金星在这两个位置之间运行时，它应当完成一个完整的月相序列，就像我们看到的月亮那样。在伽利略与他过去的一个学生贝内代脱·凯斯特利（Benedetto Castelli，1578—1643）的通信中，他阐述了这两种理论的预测之间重要的不同，并且他还指导了 1610 年 10 月到 12 月期间一系列至关重要的观测。结论是非常清楚的。这些观测最终确认了哥白尼的

---

① 如月亮一样的消长盈亏。——译者注

预测，证实金星的确是在围绕太阳轨道运行。1610 年 12 月 11 日，伽利略开玩笑似地给开普勒寄了一张小纸条[93]，上面写满了晦涩难懂的变形词："Haec immatura a me iam frustra leguntur oy"，意思是说"我早就已经证明出来了"。开普勒左思右想不得其解，最后不得不放弃揣测[94]。1611 年 1 月 1 日伽利略又给开普勒写了一封信，他又写了一句话，其中颠倒了变形词中的字母："Cynthiae figuras aemulatur mater amarum" [这句话的真实意思是"爱神（Venus，意指金星）的母亲模仿辛西雅（Cynthia，这是月亮女神的称号）的外表"]。

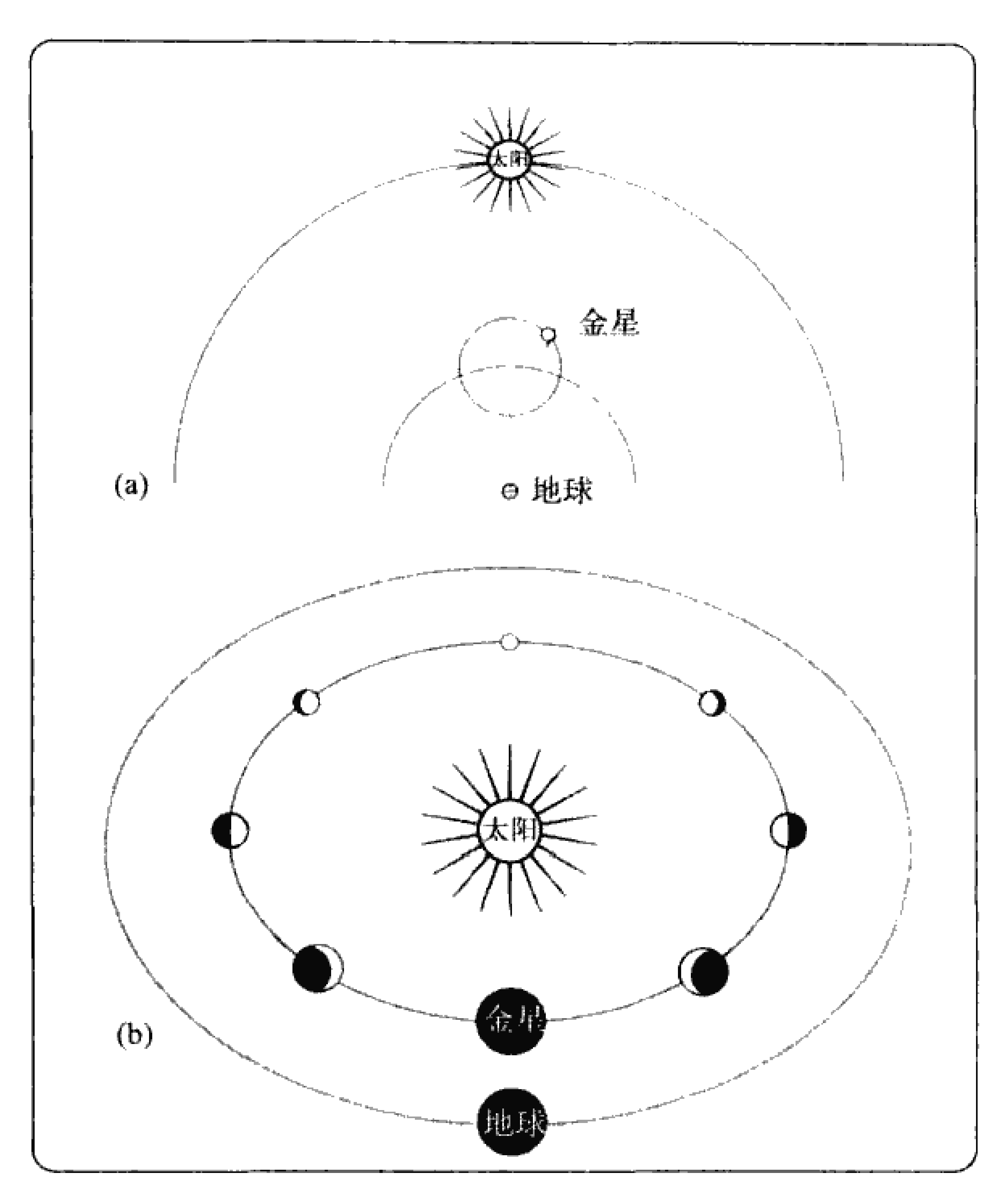


图　3-8

到目前为止，我所描述的伽利略发现，要么与太阳系中的行星有关——它们围绕太阳运行并反射太阳光的天体，要么与围绕那些行星运行的卫星有关。伽利略还有两项非常重要的发现，它们也与星星有关，这里的星星指的是能自己发光的天体（恒星），例如太阳。第一项是关于太阳的。在亚里士多德学派的世界观里，太阳被认为是非现实世界中完美的代表，并且永恒不灭。想象一下，当人类意识到太阳的表面远称不上完美时，这会带来多么巨大的震撼。太阳有瑕疵，并且在自转过程中还会不断出现黑斑，这些黑斑过后又消失了。经过仔细观察，伽利略绘制了太阳黑子图像，如图 3-9 所示，这是他的亲笔手绘。对此，伽利略的同事费德里科·塞思（Federico Cesi，1585—1630）写道，他们“为这样壮观的奇景和精确的表达而感到高兴”。实际上，伽利略并不是第一个观察到太阳黑子的天文学家，也不是第一个记录它们的人。有一本由耶稣教会神父、科学家克里斯托弗·沙伊纳（Christopher Scheiner）所写的小册子《与太阳黑子有关的三封信》（*The Letters on Sunspot*）让伽利略十分恼怒，甚至他还被迫就此发表了一份清晰明白的答复。沙伊纳坚持认为在太阳表面不可能有真正的黑子[95]。沙伊纳的主张主要是基于两个原因：一是按照他的观点，黑子的存在是因为它们太黑了（他认为黑子的色泽要比月球的黑暗部分的颜色还要深）；其次，太阳黑子似乎总是不能回到相同的位置。由此，沙伊纳得出了结论，太阳黑子是在太阳上运行的小行星。很明显，伽利略并不这么认为，在他的著作《关于太阳黑子的历史和证明》（*History and Demonstrations Concerning Sunspots*）中，他系统地逐条驳斥了沙伊纳的观点。伽利略用他那一丝不苟的态度、风趣诙谐的表达，以及让奥斯卡·王尔德（著名作家）都会情不自禁地站起来并长时间鼓掌的绝妙讽刺，阐明了太阳黑子实际上并不是真的是“黑的”，只是相对于太阳耀眼明亮的表面而言，它们显得颜色很深。除此之外，关于太阳黑子在太阳表面的确存在，伽利略没有任何疑问（在本章

稍后部分还会继续讨论伽利略的证明）。

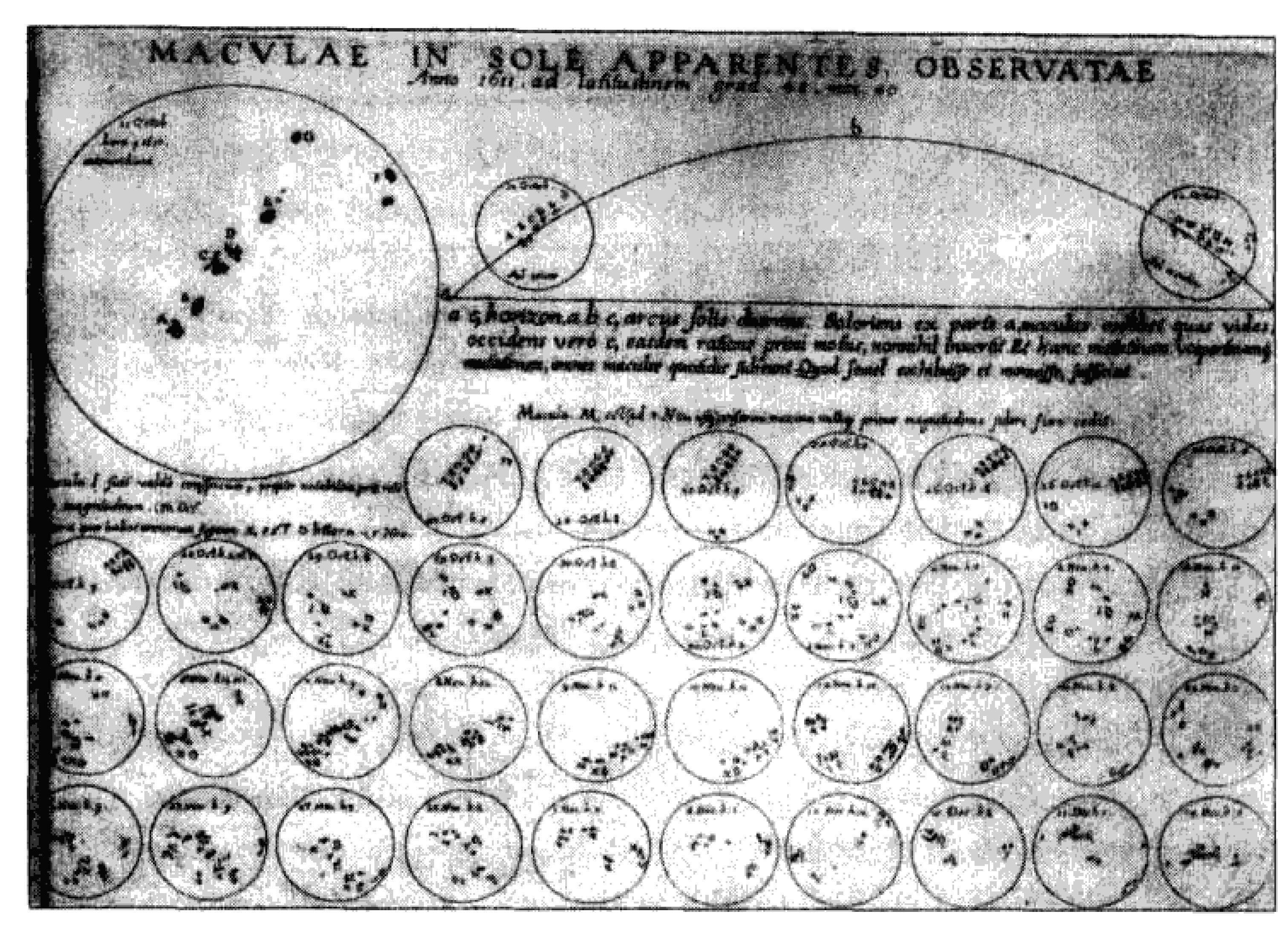


图　3-9

伽利略对另外一些天体的观测是人类历史上首次对太阳系以外的宇宙空间进行的探索。与他在观察月球和行星时的经历不同，伽利略发现即使利用望远镜也根本无法看清这些天体。这一现象的含义是十分清楚的，就是这些星星要比行星远得多。这本身就令人十分吃惊，但是真正让人震惊的是那些新发现的星星的数量，通过望远镜能看到它们发出的微弱的光芒。在猎户星座周围一小块区域内，伽利略发现的星星不少于 500 颗。当伽利略把他的望远镜横扫过银河——穿越过夜晚星空的一小片昏暗的光带，他陷入了极度惊讶之中，因为他发现即使是看上去非常平滑明亮的光斑，事实上也是由数不清的星星组成的，而这过去从来没有人发现过。突然间，宇宙变大了！伽利略用科学家所特有的理性和冷静的语言，记录下了他的观察结果：

> 我们所观察到的第三个是银河的物质本质，在望远镜的帮助下，我们可以非常仔细地观察银河，所有那些几代人为之争论不休并且让哲学家头痛不已的问题，被可以看到的现实给解决了，我们终于可以从世俗的争吵中解放出来。银河系实际上是由无数星星组成的聚集体，这些星星可以被划分为不同的星座。不论你的望远镜指向哪片区域，你都会看到在你视线所及范围内有数不清的星星。其中有相当一部分星星更大，也更显眼，但是更多的则是比较小的并且是难以发现的天体。

与伽利略同时代的一些人反应十分热烈。他的发现激发了全欧洲人的想象，既有科学家，也有那些并不从事科学研究的人。苏格兰诗人托马斯·斯格特（Thomas Seggett）就用一种十分强烈的语气说[96]：

> 哥伦布发现了新大陆，人类却为之杀戮。
> 伽利略的新世界没有伤害任何人。
> 哪一个更好？

亨利·沃顿（Henry Wotton）爵士[97]，当时他任英国驻威尼斯大使，在《星际信使》出版后想方设法搞到了一本，并迅速把它寄给了英国国王詹姆斯二世，随书还附了一封信：

> 我呈送给陛下的是近来发生在我周围最轰动的新闻（我可以公正地这么说），随信寄去的书是由帕多瓦的一位数学教授所写的，他借助一种光学仪器的帮助，发现了四颗围绕木星运行的小行星，除此外还发现了其他许多恒星。

如果把伽利略的所有成就都记录下来的话，可以写出好几卷（事实上已经写出来了），但这超出了本书的范围。这里我只是想探讨其中一些惊世骇俗的发现对他的世界观产生的影响。特别是，如果说数学与广阔

的宇宙之间有联系的话，伽利略发现了这是一种什么样的联系吗？

自然之书

科学哲学家亚历山大·科瑞（Alexander Koyré，1892—1964）曾经评价道，伽利略在科学思想上的革命可以提炼为一项本质原则：数学是科学的基本原理。当亚里士多德学派沉醉于定性描述自然，为此甚至求助于亚里士多德的权威时，伽利略则坚持认为科学家应当倾听自然本身所发出的声音，他主张解密宇宙术语的关键是相关的数学和几何模型。这两种方法之间有显著的不同，分别被各自阵营中的领军人物在其著作中举例证明过。亚里士多德学派的乔治奥·科瑞西奥（Giorgio Coresio）[98]写道："让我们总结一下，那些不想在黑暗中工作的人必须向亚里士多德求教，他是一位优秀的自然解说者。"对此，另一位亚里士多德学派的比萨哲学家文森佐迪·格拉齐亚（Vincenzo di Grazia）补充道[99]：

> 在考虑伽利略的证明之前，弄明白"那些想通过数学推理证明自然事实的人"与真理相距有多远这个问题，似乎是十分必要的，在这些人之中，如果没有弄错的话，与真相相距最远的一个人就是伽利略。所有的科学家，包括艺术家都有他们自己的准则，有他们自己的理由，也正是通过这些，他们才能够说清楚他们各自领域内有哪些特性。用一门科学的法则无法证明其他科学的性质。因此，如果有人认为他可以用数学观点来证明自然的属性，这种想法简直是太疯狂了，因为这两门科学完全不同。自然科学家研究自然物体，这些物体有它们自己的运动形式和适用的环境因素，但是数学研究的是从所有运动中抽象出的结果。

这种封闭式的划分科学分支的思想，是伽利略所极力反对的。在他的《论浮体》这本流体静力学专著的草稿中，伽利略引入了数学作为人

类真正揭示自然奥秘强有力的工具[100]。

> 我可以想象那些来自敌对者们的言辞激烈的责难，我几乎都能听到他们在我耳边的咆哮：这个问题应当是物理学研究的，不能用数学来解决；在处理数学问题时，几何学家应当始终坚持他们的想象，并且当得出的结论与数学分析的结果有明显差异时，不要涉及哲学中的观点。按照他们的说法，似乎有不止一种类型的真理，似乎几何学在今天是获得哲学真理的一种阻碍，好像一个人要是成了一位哲学家，就不可能同时是一位几何学家。我们似乎还必须把这种暗示作为必要的结论，一个人只要他研究了几何，就不可能懂得物理，也不可能从物理学的角度出发，去理性地分析和处理物理学中的问题。从这种观点出发，最愚蠢的一件事，是有一位内科医生怒气冲冲地宣称，阿夸彭登泰（Acquapendente）的那位伟大的医生[这里指的是意大利阿夸彭登泰的解剖学家谢洛尼莫斯·法布里休斯（Hieronymus Fabricius，1537—1619）]，既然是一名著名的外科医生和解剖学家，就应该满足于他自己的领域，只用他的外科手术刀和药膏来治疗病人，而不应该再试着利用药物来治疗疾病。在这位愤怒的医生看来，外科知识与药剂学知识应当是完全对立的，甚至外科知识会损害药剂学知识的发展和运用。

人们观察自然现象并试图了解其成因和规律，但是如果站在不同的角度去认识和分析的话，对同一自然现象的解释可能会完全不同。这里仍然以太阳黑子的发现和认识为例，这是一个非常简单的例子，我们却能从中得到一些很重要的启示。正如我在前文中曾经提到过的，耶稣教会天文学家克里斯托弗·沙伊纳全面并仔细地观察了太阳黑子，但是他坚信亚里士多德学派完美天空的理论，这一偏见使他犯了错误，并影响

了他的判断。随后，当他发现太阳黑子不能回到同一位置并按原先的顺序排列时，他马上声明他“能防止太阳被黑子所伤害”。他所坚持的天空静止不变这一理论前提限制了他的想象力，并且妨碍了他对“太阳黑子可以改变，甚至面目全非”这一观点的研究和思考，他最终得出了错误的结论：太阳黑子必须是围绕太阳运行的行星[101]。伽利略对于太阳黑子距离太阳表面有多远这个问题的解释则完全不同。他把需要解释的现象总结为 3 点：第一，黑子在接近太阳球体边缘时比它们在太阳圆周中心附近时要纤细一些；第二，当黑子越接近太阳的中心，它们之间的距离看起来似乎要更大一些；第三，黑子在太阳圆周中心附近的运动速度似乎要比它们在太阳圆周边缘要快一些。伽利略仅仅使用了一个几何结构，以此为基础提出了一种猜想，而这个理论猜想却能解释所有观察到的现象。伽利略认为太阳黑子与太阳表面相邻，并且被太阳吸引，在其周围运动。如果对这个猜想进行细节性的解释的话，就必须理解球体上一种在光学上被称为透视收缩的视觉现象，伽利略的理论猜想主要是基于这一现象提出的。这种现象是指从远处观察球体上的物体时，人类的视觉会感觉物体越接近球体边缘，该物体就会越细，物体之间的距离也会更近（图 3-10 展示了在一个球体上画的几个圆环，可以很清楚地看到这几个圆环的透视收缩现象）。

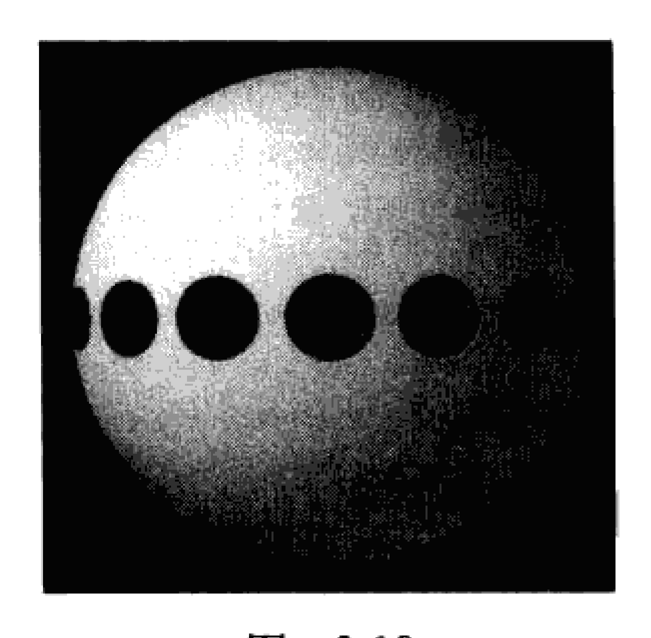


图　3-10

伽利略的证明对于建立科学研究过程而言意义重大。伽利略表明，观测到的数据只有纳入适当的数学理论中时，才会在描述现实世界时有意义。若不是在更广阔的背景中理解，同样的观察可能会导致有歧义的解释。

伽利略从来没有放弃过任何一次斗争机会，他对于数学本质的思考，以及对数学在科学研究中的地位的认识，在他出版的一本辩论集《试金者》（*The Assayer*）中进行了集中和清晰的阐述。这本闪耀着光辉思想、富有真知卓见的学术专著，一经面世马上就流传开来，甚至教皇乌尔班八世（Urban Ⅷ）在进餐时仍不忍释卷。但是，你也许会十分惊讶，伽利略在《试金者》[102]中的核心观点却明显是错误的。在这本书里他试图找出理由证明，彗星实际上是月亮这一边的光学折射所引起的一种巧合现象。

围绕着《试金者》这本书展开的故事听起来有点像是从意大利歌剧的剧本中摘录出来的。在1618年中，前后有3颗彗星接连出现在夜空里。特别是第三颗彗星，可观察时间长达3个月之久。在1619年，来自耶稣教会罗马神学院的霍雷肖·格瑞斯（Horatio Grassi），匿名出版了一本小册子，介绍他对这些彗星的观测情况。在伟大的丹麦天文学家第谷·布拉赫的研究基础上，格瑞斯得出结论，彗星位于太阳和月亮之间的某个地方。这本小册子本来不太受人关注，但是当从朋友那得知，耶稣教会准备把格瑞斯的这本书当做攻击哥白尼学说的材料时，伽利略决定对此进行回应。伽利略的回应形式是一系列演讲（其中大部分演讲稿是他本人亲笔所写），这些演讲稿被他的学生马里奥·古德西奥[103]（Mario Guiducci）结集出版，这就是《关于彗星的演讲》（*Discourse on the Comets*）的由来。在这本书中，伽利略公开抨击了格瑞斯和第谷。这次轮到格瑞斯出击了，他以萨利奥·沙西为笔名，并伪装成他自己的一个学生，公开回复了一篇文章，言辞极为尖酸刻薄。在这篇文章中，格瑞斯毫不含糊地批评了伽利略[这篇回复被命名为《天文学与哲学的天平》（*The*

Astronomical and Philosophical Balance)，重点讨论了伽利略对于慧星的观点，也讨论了马里奥·古德西奥在佛罗伦萨学院所介绍的观点]。格瑞斯在解释他利用第谷的方法计算彗星的距离时争辩道[104]：(假装他的学生)

> 请允许我的老师去追随第谷的步伐吧！这是一种错吗？如果是的话，他应当去追随谁呢？是亚历山大学派日心说的创造人托勒密吗？他的追随者的喉咙正被出鞘的、越逼越近的火星之剑指着。是哥白尼吗？但是他虔诚地呼吁每个人都应当远离他，并且还蔑视、反对他最近备受非难的猜想。因此关于那些未知星星的解释，第谷是唯一一位赢得我们认同的领导者。

这些文字非常直观地说明了在人类进入17世纪时，耶稣教会的数学家们在追寻真理的过程中不得不走的弯路。一方面，格瑞斯对伽利略的批评富有深刻的洞察力，并且完全是公正客观的。但另一方面，由于不能屈服于哥白尼主义者，这些条条框框同时也禁锢了格瑞斯的思维，阻碍了他进行全面的理性分析。

作为旁观者，伽利略的一些朋友看得十分清楚，格瑞斯的攻击会从根本上动摇伽利略的权威。他们极力要求伽利略进行反击。这最终促成伽利略在1623年出版了《试金者》。(书的全名表明，这本书精确地权衡了萨利奥·沙西的《天文学与哲学的天平》。)

正如我在上文中提到的，在《试金者》一书中，伽利略对数学和宇宙两者之间的关系做了最清晰、最有力的阐述，这里摘录了其中一段有代表性的文字[105]：

> 我相信，萨利奥·沙西坚信不移地认为，在哲学中，一定要用某些名人的观点来支持自己，这是十分关键的，就好比，

> 我们的思维如果不与其他人的理性思考相结合，那一定是无知而浅薄的。也许他觉得哲学是某些人创作的奇幻小说，就像《伊利亚特》（*Iliad*，古希腊描写特洛伊战争的英雄史诗，相传为荷马所作）或《奥兰多的疯狂》（*Orlando Furioso*，由卢多维科·阿里奥斯托在16世纪创作的叙事史诗）一样，这些书中最无关紧要的就是其中所写的故事的真实性。沙西先生，事情不是这样的。当记载哲学的那本伟大的书（我的意思是指宇宙）就在我们眼前时，如果我们不能首先学懂弄通它所使用的语言和文字符号的话，我们就不可能理解它。用来书写这本书的语言就是数学，文字符号就是三角形、圆形和其他一些几何图形。如果没有它们，人类想理解书中哪怕一个字都是不可能的。没有它们，人类想穿越迷宫的任何努力都是徒劳的。

振聋发聩，不是吗？甚至在有人提出"为什么数学在解释自然方面如此有效"之前几个世纪，伽利略就认为他已经得到了答案！对他而言，数学是宇宙唯一的语言。他坚持认为想要理解宇宙的话，就必须使用它所使用的语言。从这个角度上讲，他坚信上帝就是一位数学家！

如果能完整理解伽利略著作表达的思想，就会感觉到他细腻地描绘了一幅画卷，画中清晰地表达了他对数学作用的理解。第一，我们要认识到对伽利略来说，数学最终就是几何。他对绝对数字的计算基本不感兴趣。他主要用数量比例和相关的表达来描述自然现象。伽利略是阿基米德真正的信徒，他所使用方法的基本原则就是广泛而有效地运用几何。第二，他对几何和逻辑作了严格区分，这一点在伽利略的最后一本著作中集中进行了阐述，这本书就是著名的《关于两门新科学的对话和数学证明》（*Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences*）[106]，书中记录3名对话者之间的讨论内容，这3个人分别是

萨尔维蒂（Salviati）、萨格莱多（Sagredo）和辛普利西奥（Simplicio），他们分别代表科学史上泾渭分明的不同阵营。萨尔维蒂是伽利略的发言人，代表了伽利略的观点。萨格莱多是一位颇有点贵族气的哲学爱好者，他的思维已经从亚里士多德的错误观念中解放出来了，因此他能被新的数学科学的力量所说服。辛普利西奥，在伽利略过去的著作中被塑造成为一个被亚里士多德权威所折服的人，他完全认同亚里士多德学派的观点，在书中以一位思想开明的学者形象出现。按书中所写的，在对话的第二天，萨格莱多和辛普利西奥之间有一段非常有趣的交流：

> **萨格莱多**：辛普利西奥，我们该怎么说呢？是不是一定不能承认几何是最强有力的工具，是能磨砺人的思维，令其完全理智，令其善于思索？难道柏拉图没有足够充分的理由让他的学生处理问题时首先以数学为基础吗？

辛普利西奥看来同意萨格莱多的观点并且引入了逻辑作为对比：

> **辛普利西奥**：我开始真正理解了，在指导我们进行推理时，尽管逻辑也是一种非常优秀的工具，但是仍然无法与几何相比，在我们探索和发现真理时，几何唤醒了我们的思维，帮助我们洞察其中的奥秘。

接下来，萨格莱多进一步明确区分了两者之间的不同：

> **萨格莱多**：对我而言，逻辑教会我判断已经发现的结论的推理和证明是不是正确并令人信服的，但是我不相信它能教给我怎么进行令人信服的推理和证明。

伽利略在这里传递的信息十分明确，他相信几何是发现新真理的工具。而逻辑，在他看来是一种方法，通过这种方法对已有的发现可以进

行评估和评论。在第 7 章中，我们还要更深入地分析另外一种观点，即认为数学完全来自于逻辑。

伽利略如何认识到数学是自然的语言？毕竟像这样一个在哲学上影响深远的结论，绝不可能凭空突然出现并成为了现实。事实上，这一思想的起源可以追溯到阿基米德的著作里。这位古希腊大师是第一个利用数学解释自然现象的人。随后，数学家似乎走入了一条蜿蜒崎岖的小路，这条路上有中世纪的计数者，有意大利宫廷数学家，通过他们努力，数学获得了值得研究与讨论的地位。最后，在伽利略时代，几位耶稣教会数学家，特别是克里斯托弗·克拉维思也承认数学应当在形而上哲学——解释了自然的哲学原理——和物理现实之间采取中立立场。在他的《对〈欧几里得几何原本〉的评论》一书的序言中，克里斯托弗写道：

> 由于数学各分支研究的东西都被认为与人类可感知的事物相分离，尽管数学专注于研究物质世界，但是如果我们考察一下它研究的课题，就会清楚地看到，数学在形而上哲学和自然科学之间占据了一个中间的过渡位置。

然而，伽利略并不满足于把数学仅仅当做两者之间的调停者或连接器。他迈出了更大胆的一步——认为数学是上帝书写自然的语言。但是这个鉴定结论引出了另外一个严肃的问题，这个问题甚至给伽利略本人的生活带来了重大的影响。

科学和神学

根据伽利略的观点，上帝在设计自然时使用的是数学这门语言。而天主教会认为，上帝是圣经的“作者”。当以数学为基础的科学解释与圣经中的说法矛盾时，人们该相信哪个呢？特伦特（Trent）的神学委员会在 1546 年直截了当地回答了这个问题：“任何一个依赖自己的判断并曲

解圣经的人，都无胆量与圣母大教堂的解释（包括已经或现在作出的）相违背，因为那里是评判他们想法正确与否的殿堂。”1616 年，神学家被要求就哥白尼的日心说理论发表他们自己的观点，他们最终得出结论，认为它是“异端邪说，在许多地方明显与圣经的含义相违背”。换句话说，教会反对伽利略所坚持的哥白尼学说，其核心不在于哥白尼揭示了地球不是处于宇宙的中心位置，而在于他对圣经的解释挑战了教会的权威地位[107]。在这场争论达到最高峰时，罗马基督教会甚至感到必须要严肃对待这场关于神学改革的论战，而伽利略也与教会产生了明显分歧。

在 1613 年末，这一事件迅速发展，伽利略过去的一个学生贝内代托·凯斯特利（Benedetto Castelli）在为托斯卡纳大公和他的随从们做一场关于天文学发现的报告时，被要求解释一下哥白尼日心说和圣经上的描写之间的差别，例如上帝让太阳和月亮停止了运动，以便使约书亚（Joshua）和以色列人能在特拉维夫谷与艾莫瑞特人（Emorites）的战争中获得胜利。尽管凯斯特利向伽利略汇报说，在为哥白尼理论辩护时“像冠军一样神气”，可伽利略还是对这场争论感到忧心忡忡。他感觉自己必须就科学和圣经之间的矛盾表达他本人的真实观点。在 1613 年 12 月 21 日写给凯斯特利的一封长信[108]中，他写道：

> 为了被大多数人所理解，圣经本应该就许多明显与精确的含义有一定差异的事物进行解释。而与此相反的是，自然是不可能被更改也是不可能动摇的，它不关心它背后隐藏的原因和工作方式是不是能被人类所理解，并且从不偏离已经规定好的自然法则。自然效应就在我眼前发生，它是源自于事实证据的必然结论。因此对我而言，任何自然效应，不论它是由经验置于我们眼前的，还是来自证明的必然结论，都不能用圣经里的文字和段落含糊地表达和解释，圣经中的数千文字有多种解释，

其中的每个句子都不可能像自然效应那样严格遵守法则。

这种对圣经含义的理解明显与当时一些严苛的神学家的观点相抵触[109]。举个例子，道明会修道士多明哥·班尼（Domingo Bañez）在1584年写道："圣灵不但鼓舞了所有人，这些话语都在圣经中记录着，他还规定和暗示了他所写下的每一个字的意思。"很明显，伽利略并不相信这一点。在他的《致凯斯特利的信》中，他补充道：

> 我倾向于认为圣灵有意使人们确信这些真理是使他们灵魂得到拯救所必需的，这些远远超出人类的理解能力，不是任何学问，或者任何圣灵所透露的意义（指圣经）能够确定地表达的。上帝赋予了我们感知、推理和理解能力，却不允许我们使用它们，但又期望我们以其他方式获得这些知识，就好像我们正处于一种利用这些天赋为我们自己获得这些知识的境地中。对我而言，这种方式并不是必须要相信的，特别是在面对那些在圣经中只有只言片语而且还有多种结论的科学时更是如此。天文学就是这样一个典型例子，在圣经中涉及这门科学的内容只有很少的一点，甚至连行星的名称和数量都没有列举完全。

伽利略的这封信的被抄送到了罗马宗教法庭，有关信仰的相关事宜通常都在这里进行评估，当时法庭中最有权势的一个人是红衣主教罗伯特·贝拉明（Robert Bellarmine，1542—1621）。起初，贝拉明对哥白尼学说的反应是十分温和的，因为他把整个日心说模型当做"挽回面子的一种方式，类似于那些提出本轮概念、却并不真正相信本轮的确存在的人的方式。"与他的前辈们一样，贝拉明仅仅把这个由天文学家提出的数学模型看做是一种噱头，认为设计这个模型的目的就是为了描述人类观察到的自然现象，并没有任何物理现实依据。贝拉明始终认为，这种"挽

回面子”式的发明，并不能证明地球真的在动。之后，贝拉明在哥白尼的书（《天体运行论》）中没有看到直接的威胁，尽管贝拉明迅速补充说，地球是运动的这一观点，不仅仅会“激怒所有哲学学者和神学家们”，也会“因为指出圣经的错误，损害神圣的信仰”。

如果再接着对这个悲剧性的故事进行细节描述的话，就会超出本书讨论的范围，也偏离了这本书关注的中心，所以在这里我只是简要地回顾一下这段历史。在1616年，哥白尼的著作被罗马教会禁书审定院列为禁书。虽然伽利略大量参考有重大影响力的早期神学家圣奥古斯汀（St. Augustine，354—430，罗马帝国基督教思想家）的思想和著作，以支持他对自然科学和圣经之间关系的解释，却并没有为他赢得更多同情[110]。虽然这些信件清晰地表达了伽利略的主要观点，他认为在哥白尼的理论和圣经的文本之间不存在本质（与表面上相比）分歧，但是在当时，伽利略还是被神学家们认为是侵入他们领地的不受欢迎的人。那些心存疑虑的神学家们在对待科学问题时毫不犹豫地表达了他们的观点。

当乌云已经在地平线上聚焦时，伽利略仍然相信理性会占据上风，事实上当理性挑战的是信仰时，这种认识是一个巨大的错误。伽利略在1632年2月出版了《关于两种主要世界体系的对话》（*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*）[111]，图3-11就是这本书首版时的卷首插图。在这本辩论形式的著作中，伽利略全面而详细地表明他的哥白尼学说思想，还通过使用力学平衡和数学的语言探索科学真相。他坚持认为人类能理解神的思维。也许很难这样说，当一个人利用几何得到一个问题的解决方法时，他在这个过程中具备的深刻见解就如同上帝一样。教会的反应是迅速而果断的。《对话》的发行在其出版之后第六个月就被禁止了，一个月之后，伽利略被罗马教廷传唤，让他就被指控为异教进行自我辩护。伽利略于1633年4月12日接受了审判，在1633年6月22日被教庭“强烈怀疑其为异端分子”。法庭指控伽利略相信并坚

持那些错误的并且与圣经相违背的教义，认为太阳是世界的中心，不是太阳从东向西运动而是地球在动，地球并不是世界的中心。判决是严厉的[112]：

> 我们判决正式监禁你，时间由本庭定夺，你要接受为期 3 年、每周 1 次的苦修，这种苦修是我们所享受的，也会对你十分有益，每周还要重复 7 遍忏悔圣歌。本庭保留部分或全部调整、减轻或取消前面提到的对你的惩罚和苦修的权力。



图 3-11

这位 70 多岁，健康已经被严重摧毁的老人不能承受这种压力，精神濒于崩溃。最后，他递交了放弃信仰的信件，信中他承诺："完全抛弃太阳是世界中心、太阳不动、地球不是世界中心、是地球在动的这种错误观点。"他总结道[113]：

> 因此，我极为渴望从尊敬的枢机和所有虔诚的基督教徒脑海中消除这种对我强烈的怀疑，我也认识到，这种怀疑是我过去的言行应得的报应。满怀诚挚和真实的信仰，我宣誓弃绝、诅咒、憎恶我先前所有的错误和异端邪说，以及其他任何与教会精神相违背的宗派，我发誓在今后绝不会再次谈论或维护任何可能引起对我类似怀疑的言论，包括口头的或书面的。

伽利略的最后一本书《关于两门新科学的对话和数学证明》在 1638 年 7 月出版发行，原稿是通过走私被偷运出了意大利，在荷兰莱顿出版（荷兰西部的一座城市）。这本书的内容真实并且有力地表达了伽利略的态度和观点，这体现在他那句传奇性的话语“Eppur si muove”之中（意思是“地球还是在动啊”）。伽利略在被审判的末期一直在念叨这句公然表达了某种违抗的话语，但他可能从来没有真正说出口。

1992 年 10 月 31 日，罗马基督教会最终决定为伽利略“恢复名誉”，承认伽利略自始至终都是正确的，但是为了避免直接批评宗教裁判所，教皇约翰・保罗二世讲道：

> 荒谬的是，伽利略作为一位虔诚的信仰者，他证实自己在这个问题上（科学和圣经之间明显的不一致）要比反对他的神学家具有更强的洞察力。当时绝大多数神学家没有看到存在于圣经自身与它的解释之间的明显差别，这导致他们不适当地将实际上属于科学研究范畴的问题转移到了宗教教义的领域。

全世界的新闻报纸都为此欢欣雀跃。《洛杉矶时报》报道称：“这是官方的正式表态：地球围绕太阳运转，甚至包括梵蒂冈。”当然也有很多人并不以为然，认为这不值得高兴，一些人觉得这种来自教廷的“mea clupa”（这是一句拉丁文，意为“这是我的过失”）太晚了，也太微不足

道了。西班牙的伽利略研究专家安东尼亚·贝尔·玛瑞（Antonio Bel Mari）评论道[114]：

> 事实是，罗马教皇仍然认为他是权威，有资格就伽利略以及与他相关的科学发表观点。这一事实表明，在教皇本人看来，什么都没有改变。教皇的所作所为与伽利略的审判官在本质上并无二致，只是他现在承认他们错了。

公平地说，教皇发现自己无论怎么做都是以失败告终。站在他的角度做出的任何一个决定，无论是忽略争议、继续承认伽利略有罪，还是最终承认教会的错误，都可能会招致批评。然而，目前当人们仍试图引入圣经的神创说作为“科学理论的”替代品（掩盖在“智能设计”这层薄纱下）时，最好不要忘了，伽利略已经在四百年前就打响了这场战役，并且最终胜利了！

第 4 章

魔法师：怀疑论者和巨人

电影《你一直想知道但却羞于启齿的关于性的所有事情》(*Everything You Always Wanted to Know About Sex*(*But Were Afraid to Ask*)) 由 7 个幽默好玩的故事组成，伍德·艾伦在其中一个故事里饰演了一位宫廷小丑，他的日常工作就是做一些滑稽可笑的事，以取悦那位中世纪的国王和他的随从们。这个小丑非常爱慕王后，因此他给了王后一些药，希望借此引诱王后，王后果然被小丑所吸引。然而，他想尽办法也未能最终得逞，面对这样的挫折，小丑在王后的卧室里焦急万分，他愤怒地大叫："我必须在文艺复兴到来之前快点想出办法，否则的话我们全部都要被涂上颜色了。"

抛开其中的玩笑成分，这句略现夸张的表达形象地表现了 15 世纪至 16 世纪在欧洲大陆上发生的事。文艺复兴时代的的确确诞生了数量庞大的美术、雕塑和建筑杰作，那些由众多大师创造的令后人叹为观止、为之倾倒不已的艺术珍品，是人类文明的重要组成部分。在科学领域，文艺复兴见证了天文学中由哥白尼、开普勒所开创，并由伽利略所发展的日心说公转理论走向了兴盛。这一关于宇宙的新见解，主要源自于伽利略利用他的望远镜观察到的结果，而在理论形成过程中体现出的洞察力则来自于伽利略在力学领域的实验。与其他因素相比，日心说是几个世纪以来数学取得极大发展的最关键的动力。在亚里士多德哲学体系发出即将崩溃的第一个信号时，在与教会神学意识形态作斗争的过程中，哲

学家们已经开始着手研究构建人类知识大厦的新地基了。数学似乎是真理确定无疑的表现形式，它为这一个新的开端提供了最完美、最坚实的基础。

在这样一个伟大的历史转折进程中，有一个人试图找出一种能指导所有理性思考的固定模式，将人类所有的知识、科学成就，甚至是人类社会伦理统一为一个整体，他就是法国年轻的政府官员笛卡儿。

一 个 梦

很多人都认为笛卡儿（如图 4-1 所示）在近现代所有伟大的哲学家之中，可以当之无愧地排名第一，同时他也是第一位真正意义上的生物学家。笛卡儿在数学上所作出的卓越贡献被英国经验主义哲学家约翰·斯图亚特·穆勒（John Stuart Mill，1806—1873）描述为"人类有史以来在精确科学的领域中迈出的最伟大的一步"[115]。当你把这些给人留下深刻印象的标签与笛卡儿在数学上的成就联系起来时，你就能理解笛卡儿的才能和智慧为什么令后人崇拜，甚至敬畏。



图 4-1

笛卡儿于 1596 年 3 月 31 日出生于法国海牙[116]，为了纪念这位著名的数学家，这座小镇在 1801 年被改名为海牙笛卡儿，自从 1967 年之后，人们更是习惯于把它称为笛卡儿镇。1604 年，笛卡儿年仅 8 岁，他被送进了拉弗莱什（La Flèche）教会学院学习拉丁文、数学、文学、科学以及经院哲学，在那里他一直学习到了 1612 年。由于笛卡儿自幼体弱，不能过多地运动，因而被特许可以不用遵守学院严格的作息时间，他不必每天早晨 5 点就起床，可以在床上度过整个早晨的时光。后来，每天利用清晨的时间进行思考的习惯伴随了他一生。他有一次对他的朋友法国数学家布勒斯・帕斯卡（Blaise Pascal）讲道，对他来说保持身体健康和取得丰硕成果的秘诀就是每天睡觉睡到自然醒。然而，正如我们随后看到的，这句话可谓一语成谶，成为了笛卡儿命运的一个悲剧性预言。

在离开拉弗莱什教会学院之后，笛卡儿又进入了普瓦提埃（Poitiers）学院学习，并最终以律师的身份毕业，但是很明显他从来没有真正从事过任何法律方面的工作。出于年轻人的浮躁不安和对外面世界的向往，他决定加入奥兰治家族莫里斯亲王的军队，当时他们驻扎在联合省（尼德兰王国）的布雷达。笛卡儿在布雷达服役期间，发生了一件小事，这个偶然事件成为笛卡儿智力发展过程中的一个标志，具有深远的意义。

传说有一天笛卡儿在大街上闲逛时，突然看到路边立着一块牌子，上面写着一道数学问题在征集解决方法。笛卡儿请第一位经过他的路人把这个问题从荷兰语翻译为拉丁语或法语[117]。几个小时之后，笛卡儿就成功地解决了这个问题，这让他真正认识到了自己在数学方面的天赋。而那位笛卡儿以前从未谋面却为他翻译问题的路人不是别人，正是荷兰数学家和科学家艾萨克・比克曼（Isaac Beeckman，1588—1637），艾萨克对笛卡儿物理数学研究的影响持续了数年之久[118]。在随后的 9 年里，笛卡儿要么流落在混乱的巴黎，要么在军队中服役。当时的欧洲正在“三十年战争”的痛苦中苦苦挣扎，战火四起、处处烽烟，不同宗教派别和

政治派系之间纷争不休，在布拉格、德国、特兰西瓦尼亚（今罗马尼亚西北部）到处都有战争，对于年轻的笛卡儿而言，要想找到战斗之处或加入战斗的行列是十分容易的。尽管如此，在这段时期他仍然利用战斗的间隙学习数学，正如他后来所说的："在研究数学时，隆隆的炮火在耳边呼啸，炮弹不时从头顶飞过。"

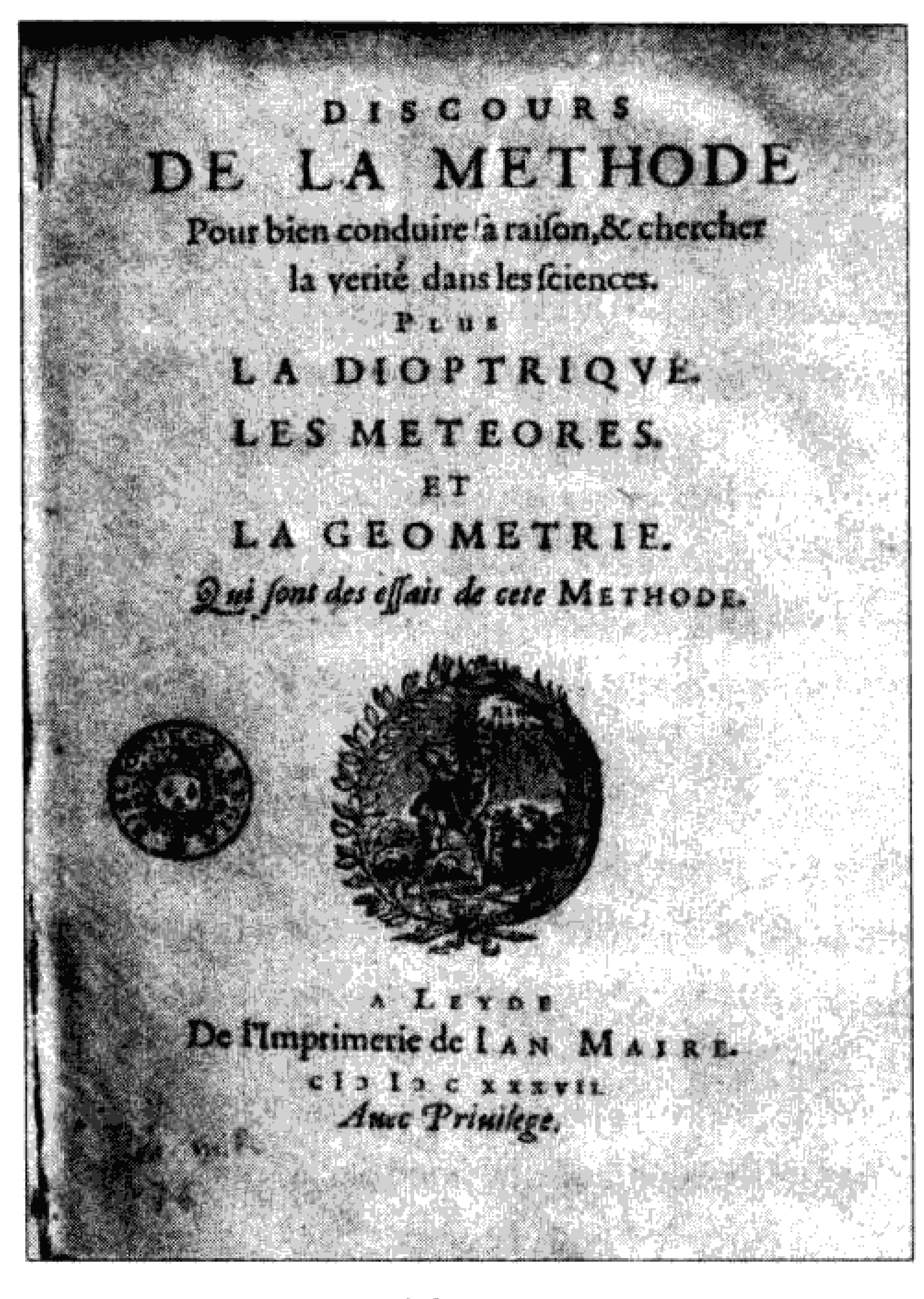
1619 年 11 月 10 日，笛卡儿做了 3 个梦[119]，这几个梦不仅对笛卡儿自己今后的生活有深远的影响，而且也标志着现代文明的开端。后来在描述这一事件时，笛卡儿在自己的笔记中写道："我满怀激情，并且从中发现了一门极好的科学的基础。"这个影响深远的梦是关于什么呢？

实际上，这 3 个梦中前两个还是噩梦。在第一个梦里，笛卡儿发现自己被狂暴的旋风卷向了空中，风的巨大力量使他不由自主地以左脚为轴快速旋转，与此同时，令他感到无尽恐惧的是随时会从空中摔下来。这时一位老人出现了，递给他一个国外出产的甜瓜。第二个梦也是一幅十分恐怖的画面，他被抓进了一个阴气森森的房间，房间里不时响起不祥的霹雳一般的巨大声音，在他身体周围还不断有到处飞溅的火花。第三个梦与前两个梦形成了鲜明的对比，呈现在笛卡儿面前的是一幅祥和静穆的画面，当他四处环顾时，发现这个房间里有一张桌子，桌子上有书时隐时现，这些书包括一部名为《诗人集成》（*Corpus Poetarum*）的诗歌选集和一部百科全书。他随手打开了那本诗歌选集翻到了其中一页，一眼看到的正是公元 4 世纪罗马诗人奥索尼乌斯（Ausonius）的一首诗。诗中写道："在我生命中我应当走什么样的道路？"（Quod vitae sectabor iter？）此时，一个人神秘地从空气中闪现了出来，他引用了另一句诗："是又不是（Estet non）。"笛卡儿想给他看看奥索尼乌斯的诗歌，但是整本书却消失在了虚空中。

一般情况下，梦境总是似是而非、颠三倒四，它的意义并不在于其具体的内容，而在于做梦的人对它们的解释。在笛卡儿的这个例子里，

笛卡儿对这 3 个神秘的梦的理解和解释产生的影响是令人震惊的。他认为百科全书代表科学知识的集合，诗集则代表了哲学、发现和热情。"是又不是"，这是著名的毕达哥拉斯对立，笛卡儿认为这代表了真理和虚妄（不必惊奇，一些心理学家甚至认为甜瓜暗示性）。笛卡儿绝对确信，这个梦表明人类所有的知识在理性思想的帮助下可以统一为一体。1612 年，笛卡儿从军队退役了。在随后的 5 年里，他继续四处游历，在旅途中他也没有放弃研究数学。在这段时间里，所有见过笛卡儿的人，包括具有巨大影响力的精神领袖红衣主教皮埃尔·德·白吕尔（Pireer de Bérulle，1575—1629）都被笛卡儿深刻的见解和清晰的思路所深深打动，为之叹服。很多人都鼓励笛卡儿继续他的研究，并将他的思考写下来公开出版。对于任何一个年轻人来说，这种慈父般的富于智慧的建议可能会起到相反的效果，就像在电影《毕业生》中对达斯汀·霍夫曼所扮演的角色所说的那句职业忠告"要塑造自己!"（plastics）一样，但是笛卡儿不同。由于他把自己的目标定为研究真理，他很容易就被说服了。最后，笛卡儿移居荷兰，当时那里似乎能提供一个更安静的思考环境，在随后的 20 年里，他写出了一本又一本不朽的著作。

1637 年，笛卡儿出版了他第一本关于科学基础思考的杰作《谈正确引导理性并在科学中探索真理的方法》（*Discourse On the Method Of Properly Guiding the Reason and Seeking for Truth in the Science*），图 4-2 展示的是这本书在首版时所使用的卷首插画。这本著作还有 3 个值得着重关注的附录，它们分别是关于光学、气象学和几何学的。紧接着，笛卡儿在 1641 年出版了一本哲学方面的著作《形而上学的沉思》（*Meditations on First Philosophy*），之后在 1644 年又出版了一本物理学专著《哲学原理》（*Principles of Philosophy*）。在这几本书以后，笛卡儿的大名传遍整个欧洲，如果要统计他的仰慕者以及和他保持联系的人，还要把已经被放逐的波希米亚公主伊丽莎白（1618—1680）包括在内。1649


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Priuilege.

图 4-2

年，笛卡儿被邀请访问瑞典，为瑞典女王克里斯蒂娜（Christina，1626—1689）教授哲学。出于对王室成员的尊敬，笛卡儿接受了邀请。事实上，笛卡儿在给女王的回信中充满了 17 世纪所特有的谦卑，以致在今天我们看到这封信时都感觉有点荒谬可笑了："我已经做好一切准备以执行您的任何命令，如果我是出生在一个瑞典家庭或芬兰家庭，对您我将不可能比现在有更多的热情，也不可能表现得更完美了。"那位有具有钢铁般意志的 23 岁瑞典女王坚持要求笛卡儿在早晨 5 点这个极不适宜的时间给她上课。在北欧这片土地上，清晨实在是太过于寒冷了，笛卡儿在给他朋友的信中写道，在这里甚至连思维也被冻僵了[120]。后来的事实证明这对他是

致命的。他说："在这里我不得其所，很不自在，我只想要宁静和沉思，如果一个人自己不能获得宁静，即使是地球上最有权势的国王也不能赐予他。"在勇敢地面对瑞典几个月严酷寒冬的黑暗早晨之后（对于笛卡儿来说这样的清早是他一生都在努力回避的），他最终患上了急性肺炎。在1650 年 2 月 11 日清早，就好像试图避开再次被闹钟叫醒一样，4 点钟，笛卡儿去世了，享年 53 岁。这位开辟了现代文明的人，成为了他自己的庸俗势利和一位年轻女王任性的牺牲品。

笛卡儿被安葬在了瑞典[121]，1667 年他的遗体（或者说至少是他遗体的一部分）被运回了法国。在那里笛卡儿的遗体被转移过多次，一直到 1819 年 2 月 26 日才最终正式埋葬在圣日尔曼·德·普瑞凯斯（Saint Germain des Pres cathedral）的一所附属小教堂内。图 4-3 的照片是我本人正站在这块非常简朴的、黑色的笛卡儿纪念碑旁边。据说笛卡儿有一块头盖骨从瑞典流出后，经过了数人之手，最后被化学家伯齐得乌斯（Berzelius）购得，并带回了法国。这块头盖骨现在存放在巴黎人类博物馆的自然科学馆中，常呈放在穴居人头盖骨的对面。



图 4-3

一位现代人

如果“现代”这个标签贴在了某个人身上，通常意味着他能非常自然地与20世纪（现在就是指21世纪了）的专业人士或同行们进行交流。称笛卡儿为现代人的原因是他敢于质疑在他之前的所有哲学和科学中的结论。他曾经说过，他所接受的教育，唯一的用处是使他感到更加困惑以及让他认识到了自己的无知。在他那本伟大的《谈引导理性并在科学中探索真理的方法》一书中，他写道：“关于哲学，我发现，尽管它们在人类最聪明的那些大脑中孕育了几个世纪，但其中所有的观点都有争议，并且因此而更加不确定。”虽然笛卡儿本人的哲学思想同样也被后来的哲学家指出存在显著的缺点；但是笛卡儿的这种大胆的、过去从未有过的质疑，甚至是对最基本概念的怀疑，的确使他显得十分“现代”[122]。从笛卡儿现存的书中的观点可以看出，更重要的是笛卡儿认识到数学的方法和推理步骤能精确地得出某种必然结论，而这正是在他之前的经院派哲学所缺乏的。[123]他的观点表达得十分清楚：

> 那些由非常简单的推理所组成的长长链条，是几何学家习惯于用来完成他们最困难证明的工具。这让我有理由推测，所有能被人类理解的知识都以同样的方式彼此联系，并且我认为，如果我们拒绝接受那些表面上看起来是真理、但事实上却并非真理的结论，而且遵守从一事物演绎到另一事物的正确的顺序，那么没有一件事物是我们根本触及不到的（理解不了），或者隐藏得太深以致于我们发现不了的。

这些言辞大胆的表达，在某种程度上说明了笛卡儿的观点甚至比伽利略更深刻。在笛卡儿看来，不仅物理宇宙是用数学语言写就的，而且人类所有的知识都遵循数学的逻辑。用笛卡儿的话说：“数学方法是最强

有力的知识工具，比上帝赠予我们的任何其他工具都有效，它是万物的根源。”因此，笛卡儿的一个重要目标就成了证明这个物理世界，这个对他来说是可以用数学语言描绘的现实，可以不用依赖经常误导我们的感性认识来描述。他提倡人类在思维过程中应当过滤掉眼睛所能看到的（即感性认识），而将目光转向深入的思考（即理性认识）。笛卡儿坚持认为：“没有一个确定的标志能用来区分已被唤醒的存在和那些还在沉睡的存在。”但是，笛卡儿同时也怀疑，如果我们原以为真实的所有事物其实都不过是一场梦，我们怎么能知道，那些真实的事物甚至是地球和天空，不是某些“有无穷力量的恶魔”为我们制造出的某种“梦幻般的虚妄”？或者，正如伍德·艾伦曾经提到的：“如果所有的事情都是一种幻觉，没有什么是真实存在的，那么会发生什么呢？在这种情况下，我绝对是为我的地毯多付钱了。”

这些在笛卡儿脑海里不断涌现、接踵而至的疑问最终促使他提出了他最著名的名言[124]：“我思，故我在。”换句话说，对笛卡儿而言，除了思考之外，还存在一种理性的思维。也许有点自相矛盾，怀疑这种行为本身却不能被质疑！笛卡儿试图从这看起来微不足道的开端构建一个完整的可信的知识体系。笛卡儿广泛涉猎哲学、光学、数学、力学、医学、胚胎学、形而上哲学，并且在这些学科中都取得了对后世很有影响力的成就。尽管笛卡儿坚持人类理性思考的能力，他却不相信仅凭逻辑就能揭示真理。在这一点上，笛卡儿得出了在本质上与伽利略相同的结论：“就逻辑而言，它的三段论以及其他大部分认识，在我们已知的领域内是很有效的，但是在探索未知领域时却不见得同样有效。”而在他大胆尝试彻底改造和重新构建所有学科基础的过程中，笛卡儿试图利用他从数学方法中提炼出的规律，确保他的工作建立在实际的、坚实的基础之上。笛卡儿在他的著作《指导思维的规则》（*Rules for the Direction of the Mind*）中描述了这些严格的指导规律。他将从那些他确信不疑的真理开

始（有点像欧几里得几何学中的公理）；他将试图把那些错综复杂的问题分解成若干更易于处理的简单问题；他将从那些最基础的现象开始研究，而后逐步深入到其内部复杂的本质；他将重复检查整个过程以确保不会有任何可能的解决方法被忽略。不用说，即使是通过这种严格的步骤小心翼翼地构建，也不能保证笛卡儿的结论完全正确。事实上，尽管笛卡儿最为人们所称道的是他哲学上的巨大突破，但是真正使他获得不朽声望的还是他在数学上的成就。在这里我将简要介绍他的一个非常简单但却闪耀着夺目光芒的数学思想，它被约翰·斯图亚特·米尔（John Stuart Mill）称为是“有史以来精确科学最重大的一次进步”。

纽约市地图上的数学问题

让我们看看图 4-4 所示的纽约市曼哈顿区的地图，这只是完整的曼哈顿区地图的一部分。如果你站在 34 大街和第八大道的拐角处，而你想要找的人站在 59 大街和第五大道的交汇处，你肯定会找到他，对吗？这就是笛卡儿为一门新的几何学科所提出的一种全新的方法的精髓。笛卡儿在《谈方法》的一篇附录的第 106 页中大体勾勒了这一思想，这篇附录又被称为《几何》[125]。你也许很难相信，但正是这个表面上看起来十分简单，实际上却非同凡响的概念从根本上改变了数学。笛卡儿用这个微不足道的事实表明，正如下面这幅曼哈顿地图所展示的那样，用一对平面上的数字可以清晰无误地确定一个点的位置（如图 4-5a 所示）。之后，笛卡儿利用这一事实发展出了一门非常有用的理论——解析几何。为了纪念笛卡儿，这种利用两条相交直线提供的参考系被命名为笛卡儿坐标系。传统上，我们把水平线标记为“x 轴”，把垂直线标记为“y 轴”，这两条线相交的点被称为“原点”。例如在图 4-5a 中所标记的 A 点，其横坐标值为 3，纵坐标值为 5，这样 A 点就可以用一组有序的数字（3,5）表示了（注意，原点的坐标值被规定为(0,0)）。试想一下，如果我们想描

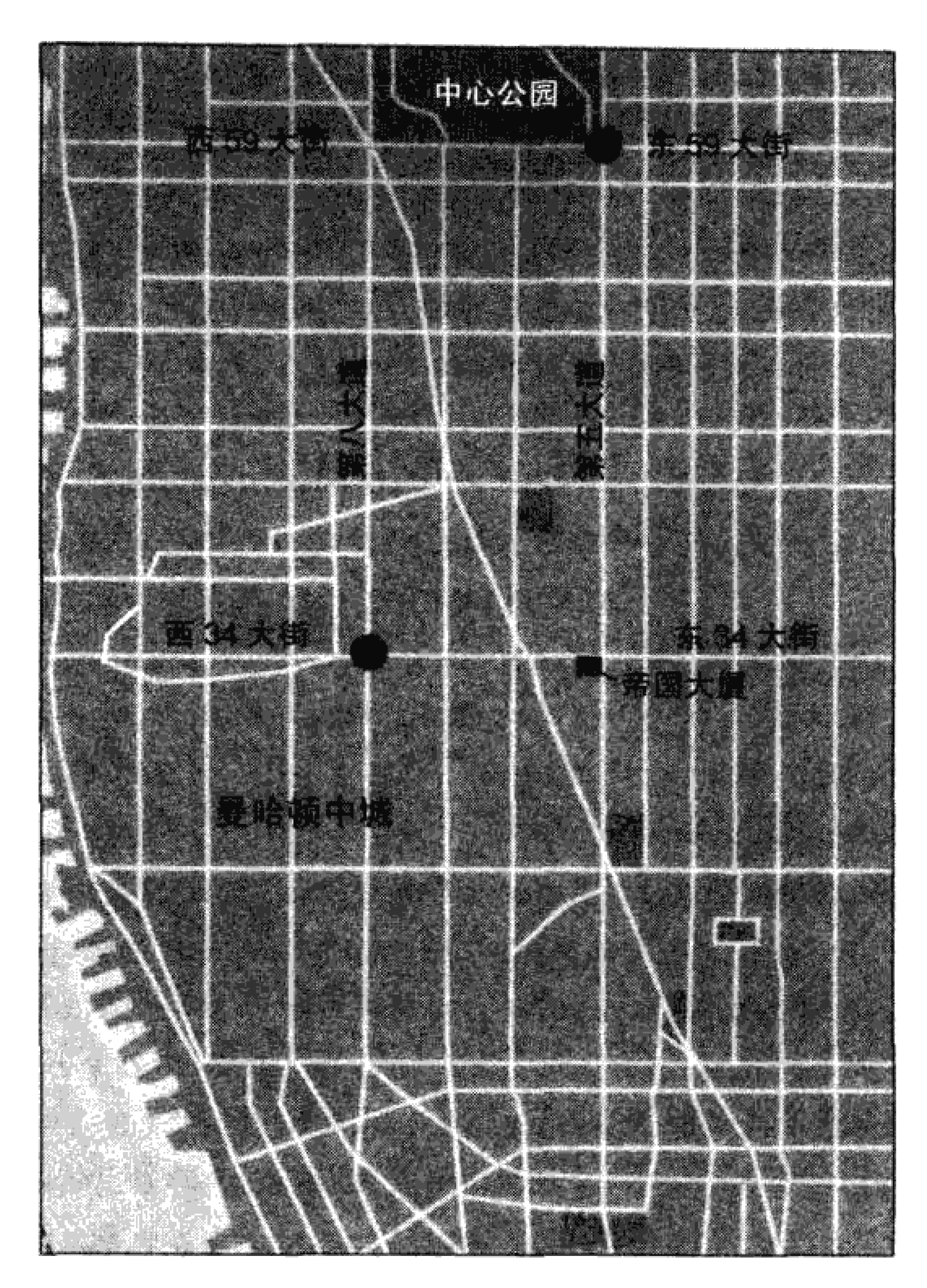


图　4-4

绘出平面上距离原点 5 个单位的所有点，肯定会画出一个以原点为圆心、半径为 5 个单位的圆（如图 4-5b 所示）。如果在这个圆周上取一个点，其坐标值为(3,4)，我们会发现这一坐标值恰好满足 $3^2+4^2=5^2$。事实上，我们可以很容易地证明得出（利用毕达哥拉斯定理），这个圆上的所有点的坐标(x,y)都满足 $x^2+y^2=5^2$。更进一步地说，在这个平面上，只有这个圆周上的点，其坐标值能使等式 $x^2+y^2=5^2$ 成立。这就意味着代数等式 $x^2+y^2=5^2$ 可以精确地、并且也是唯一地表示这个圆。换句话说，笛

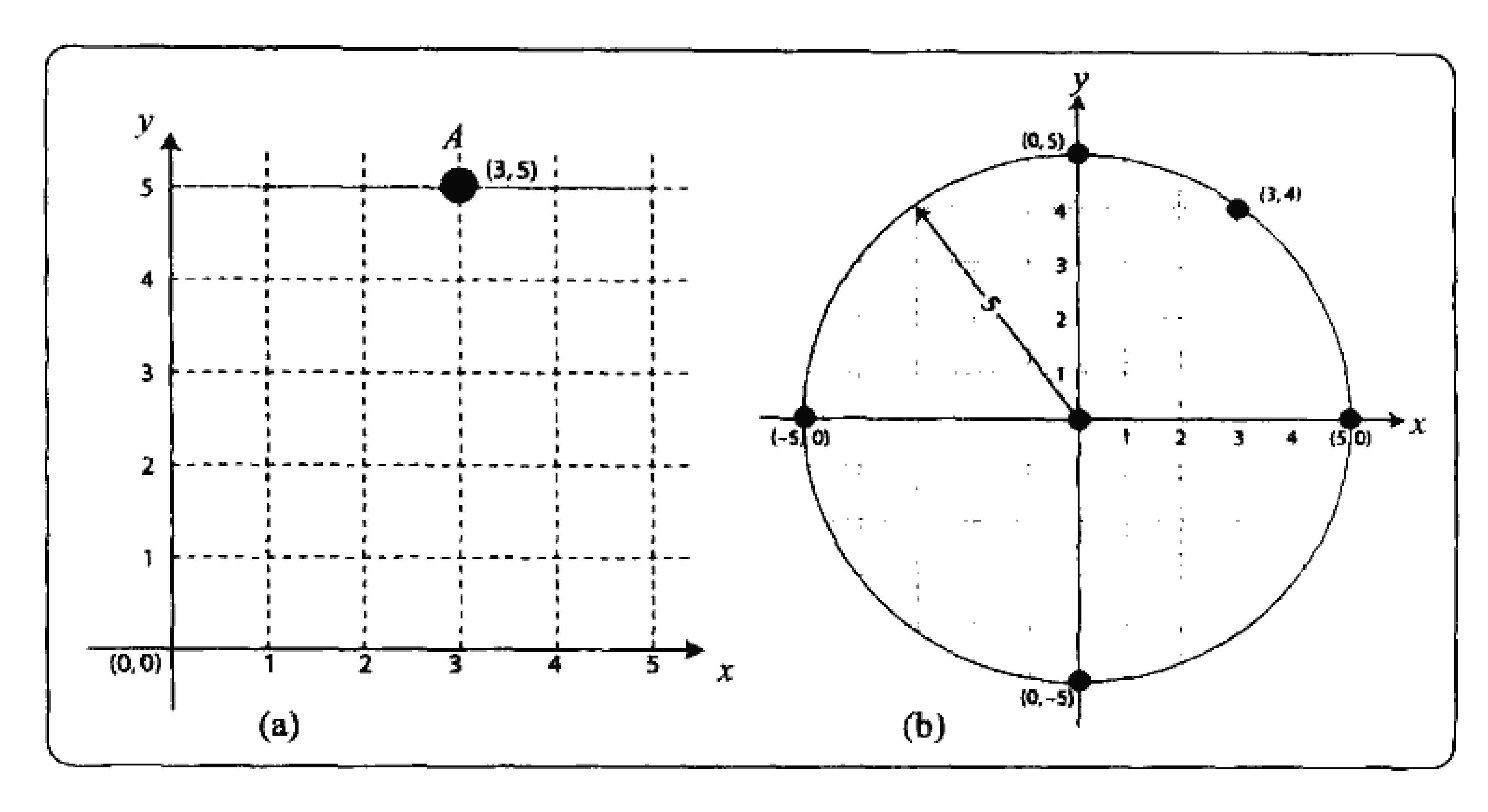


图　4-5

卡儿发现了一种能用代数等式或数字方式表现几何中曲线的方法，而且反之亦然[126]。如果只针对这样一个简单的圆来说，这种方法乍听起来似乎也没有什么值得激动的。但是事实上，今天我们所有能见得到的曲线图，包括股票市场每周的波动图、过去几个世纪以来北极的气温变化图，或者宇宙的比例图，全部都是来自于笛卡儿这个天才的思想。从此以后，突然之间代数和几何不再是两门独立的数学分支了，并且它们还表达了相同的真理。描述这条曲线的数学等式内在地（隐性）包含了该曲线所有我们能想象得到的特性，例如欧几里得所有的几何定理。这还不是全部，笛卡儿进一步指出，不同的曲线可以用相同的坐标系来描述，并且通过找出代表这些曲线的代数表达式构成的方程组的一般解，就可以非常简单地得出这些曲线的交点。利用这种方法，笛卡儿充分利用代数学自身的优势纠正了传统几何学中那些令他极为厌烦的缺点。例如，欧几里得将几何中的点定义为不可再分的、没有大小的独立存在体，而笛卡儿使用一对简洁有序的数来定义平面上的点，在此之后，欧几里得那种极为模糊的定义方法就永远地过时了。不过，这种全新的、蕴含深刻见

解的定义方式只是笛卡儿解析几何思想的冰山一角。笛卡儿进一步提出，如果坐标点(x,y)中的 x 和 y 这两个数有某种关系，也就是说 x 的每一个值都对应着一个唯一的 y 值，那么此时，x 和 y 就构成了一种函数关系。函数的确是无处不在的，你在减肥时每天测到的体重值、你的孩子的每个生日那天测量到的他（她）的身高，或者你的汽车在行驶途中车速度与油表里程的关系，所有这些数据都能用函数来表示。

函数是现代科学家、统计学家、经济学家真正的“面包和黄油”，须臾不可或缺。如果多项重复的科学实验或观察最终得出了相同的函数关系，它们就可能被提升到自然规律的地位，这里所谓的规律是指所有的自然现象都要遵循的、用数学描述的行为方式。例如，牛顿发现了万有引力定律（在本章稍后部分我们会详细地讨论），万有引力定律指出如果两个点式群体之间的距离扩大两倍，这两个物体间的引力效应通常会降低为原来的四分之一。笛卡儿的思想为几乎所有事物的系统化数学处理推开了一扇门，上帝就是一位数学家这一观念的核心意思也不过就是如此。从理论数学的角度看，几何和代数这两门数学分支过去被认为是毫无关联的，但是笛卡儿证明了如果从更高角度分析的话，两者之间是完全等价的。通过建立它们之间的等价关系，笛卡儿拓展了数学的研究范围，并且为进入解析的领域铺平了道路，而解析则让数学家非常轻易地在数学各分支学科之间进行交叉研究。这种方法带来的好处就是，不仅各种不同的自然现象都可以用数学描述，甚至数学本身也变得更广阔、更丰富，也更统一了。正如伟大的数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736—1814）指出的：“在几何和代数沿着它们各自的道路独立前进时，它们的进展缓慢，并且应用范围也有很多限制。但是，当这两门科学结合起来以后，它们相互从对方那里汲取新鲜的活力，相辅相成，并且以快速的步伐迈向了完美。”

虽然笛卡儿在数学上取得了辉煌的成就，他本人的兴趣却不仅仅局

限于数学。笛卡儿曾经指出，如果把科学比做一株参天大树的话，那么形而上哲学就是这株大树的根，物理学是它的主干，而它 3 个最主要的分枝则分别代表着力学、医学和道德。笛卡儿对这几个分支的选择乍一看上去似乎有点奇怪，但是事实上它们分别象征着笛卡儿想要实践的新思想的 3 个主要领域：宇宙、人体和人生的指导。在荷兰生活的前 4 年里（1629—1633），笛卡儿把他所有的时间和精力都用在撰写关于宇宙学和物理学的专著《世界》（*The World*）[127]上。但是就在这本书出版的前夕，笛卡儿的工作被一些意外的消息打断了，他对这些消息感到十分惊讶，他写信给他的朋友，也就是著名的自然哲学家、评论家马里恩·梅森（Marin Mersenne，1588—1648），他哀叹道：

> 我本打算送给您一本《世界》作为新年礼物，甚至在两个星期之前，我还想如果届时全书没有按时完成的话，至少要送给您其中的一部分。但是我不得不说在这个关键时刻，我费尽心力去查问了在莱顿和阿姆斯特丹是否出版了伽利略的著作《世界体系》（*World System*），因为我曾经听说这本书去年已经在意大利出版了。从他人那里我得知这本书的确是出了，但之后不久所有的印刷成品在罗马被全部焚毁了，并且伽利略也被宣判有罪还被处以罚金。对于这个消息我感到极为震惊，以致于我差点决定把我的所有论文全部付之一炬，或者至少不能让任何人看到它们。就我所知，那位意大利人曾经还博得教皇的欢心，我想象不出，除了他试图建立地球在运动这一理论之外（对此他毫不怀疑），还会有其他任何的原因让他获罪。我知道，一些红衣主教严厉地指责这种观点，但是我曾听说所有这些类似的知识在罗马是被公开教授的。我必须承认，如果他的这种观点是错误的话，那么我的整个哲学的基础也是错误的，因为

> 他的观点可以用我的哲学思想很清晰地证明，它在我的书中每一部分都有所反映，与我书中的内容交织在了一起，如果我强行从中把它们剔除的话，我的文章就会产生严重缺陷而不再完整了。但是无论如何我不想出版一本“其中哪怕有一个字会让教会反对”的著述，因此我宁愿不出版这本书，也不愿意让它以一种残缺不全的形式面世。

笛卡儿的确放弃了出版《世界》（一份不完整的手稿最终在 1664 年编印成书发行），但在他 1644 年出版的《哲学规律》（*Principle of Philosophy*）中吸收采纳了其中的大部分结论。在这本进行了系统论述的著作中，他表达了他所理解的自然规律，还提出了旋涡理论。其中有两条规律和牛顿的运动第一定律和第二定律[128]极为相似，但可惜的是其他的部分却是错误的。旋涡理论假设太阳位于一个旋涡的中心，这个旋涡是由连续不断的宇宙物质形成的。笛卡儿认为行星随着这个涡流运动，就像一片树叶在河流形成的旋涡里围绕着涡流中心旋转一样。接下来，他认为行星也会形成自己次一等的旋涡，行星的卫星在这个旋涡里运动。虽然笛卡儿的旋涡理论明显是错误的（牛顿在后来不留一丝情面地指出了其中的谬误），但它还是十分有趣的，这是人类第一次郑重其事地把宇宙作为整体来研究的理论，这一理论依据的是在地球表面上也适用的规律。换句话说，在笛卡儿眼中，天空和地面的现象并无差别，地球是宇宙的组成部分，因而它们遵循统一的物理规律。不幸的是，笛卡儿在构建详细的理论内容时却忽视了他本人提出的原则，这个旋涡理论既不是基于自相一致的数学分析，也不是通过严谨的科学观测后得出的。尽管如此，笛卡儿提出的这一理论描述了太阳和行星在某种程度上破坏了围绕在它们周围的宇宙物质的平滑性，很久之后其中某些基本观念却成为了爱因斯坦引力理论的基础。在爱因斯坦的广义相对论中，引力并不是

作用于遥远空间的神秘的力量。在某种程度上，质量巨大的物体，例如太阳，会让它们附近的空间弯曲，就好像一个滚动的球会引起蹦床下陷一样。继而行星就会在这个弯曲的空间内沿着可能的最短路线运动。

在这段极为简练的叙述中，我刻意回避了笛卡儿几乎所有在哲学方面对后世有巨大影响力的思想，否则的话就会偏离这本书的中心主题太远了（但在本章稍后部分，我会继续讨论他对上帝的看法）。我忍不住要引用英国数学家沃尔特·威廉·罗斯·贝尔（Walter William Rose Ball，1850—1925）在 1908 年所写的那段有趣评论：

> 对于他（笛卡儿）的哲学理论，应该说，他讨论的问题已经被争论了两千年，而且可能还会被继续争论两千年。不必说，那些问题本身的确极其重要，也十分有趣，但是过去所有对这些问题的解答要么缺乏严格的理论证明，要么总是能找出反证。这样带来的后果就是每产生一种解释却会引出更多的问题，并且，每当有像笛卡儿这样的哲学家相信自己最终解决了这些问题，他的后来者在不久之后就会指出其中的谬误之处。我曾经读到过，哲学主要在上帝、自然和人三者之间的内在关系上争论不休。最早期的哲学家是古希腊人，他们主要研究上帝和自然之间的关系，也对人单独进行研究。基督教则全身心地投入上帝和人的关系讨论之中，完全忽略了自然。最后，现代哲学家们主要关心人和自然之间的关系。这种观点是时下流行的看法，它正确与否我在这里不想讨论，但是这种为现代哲学界定了研究领域的表述指出了笛卡儿著作的局限性。

笛卡儿用下面这段文字作为他关于几何的那本著作的结尾："我希望后世子孙能友善地评价我，不仅是因为我所解释的那些事，而且还因为那些我有意遗漏了的内容，这样其他人也会同样享有发现的乐趣。"

（如图 4-6 所示）。笛卡儿肯定不会知道，有一个人会把他的数学思想作为科学向前迈出一大步的核心，而这个人在他去世那年才 8 岁。这位非常卓越的天才可能比人类历史上其他所有的人都有更多的机会去享受“发现的乐趣”。

LIVRE TROISIESME.　413

les Probleſmes d'vn meſme genre, iay tout enſemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerſes; & ainſi de reſoudre chaſcun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui ſont ſolides, en coupant auſſy d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui ſont d'vn degré plus compoſés, en coupant tout de meſme d'vn cercle vne ligne qui n'eſt que d'vn degré plus compoſée que la Parabole; il ne faut que ſuiure la meſme voye pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſés a l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas malayſé de trouuer les autres. Et i'eſpere que nos neueux me ſçauront gré, non ſeulement des choſes que iay icy expliquées; mais auſſy de celles que iay omiſes volontairement, affin de leur laiſſer le plaiſir de les inuenter.

F I N.

图 4-6

那儿有光

18 世纪著名的英国诗人亚历山大·蒲柏（Alexander Pope，1688—

1744）在艾萨克·牛顿（1642—1727）去世时已经39岁了（图4-7展示的是牛顿安葬于伦敦西敏寺中的墓碑[129]），蒲柏用一句广为流传的对句，简明扼要地概括了牛顿的成就，说明他的伟大：

自然和自然规律隐藏在黑暗中，

上帝说，让牛顿去吧！之后所有角落都被照亮了。

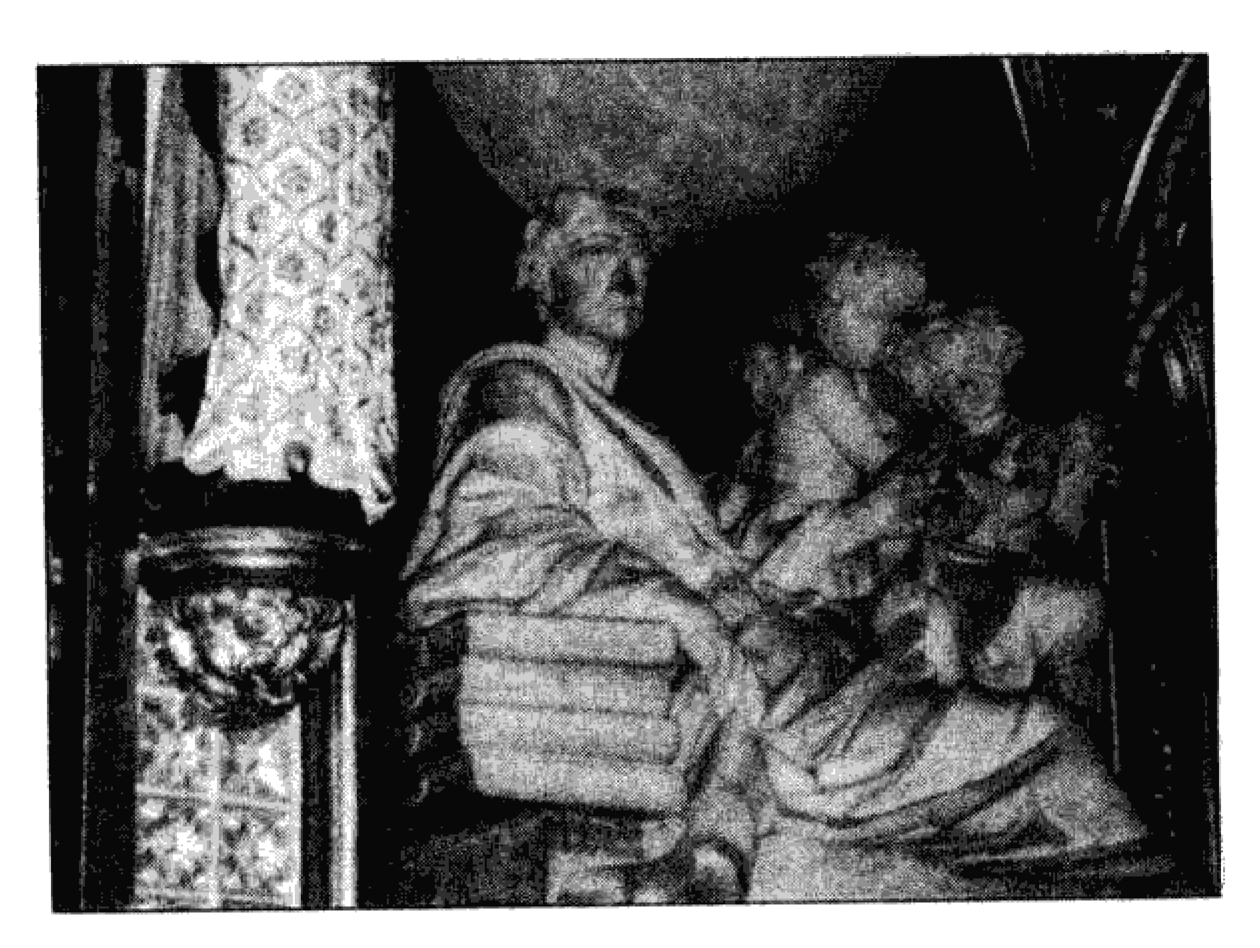


图 4-7

大约在牛顿去世以后一百年左右，拜伦爵士（1788—1824）在他的叙事诗《唐璜》（*Don Juan*）中写下了这几行字：

这是唯一一位在亚当之后，

能抓住下落的物体或苹果的人。

对于在牛顿之后的所有科学家们来说，即使抛开那些神秘因素，牛顿也的确是一个奇迹，并且还始终保持着几分传奇色彩。牛顿的那句众所周知的名言“如果说我看得更远的话，是因为我站在了巨人的肩膀上”，

常常被科学家们在展示他们最主要的发现时，作为范例来引用以表达他们的慷慨和谦虚。但是历史上真实的情况却不是这样[130]，牛顿是把这句话当做隐诲的、间接的讽刺，以回应罗伯特·虎克（Robert Hooke）的。虎克也是一位有丰硕成果的物理学家和生物学家，牛顿把他当做自己一生中科学上最大的对手。虎克曾在若干场合中指控牛顿窃取了他的思想，一项是在光学领域中某个理论，还有一项就是引力理论。在 1676 年 1 月 20 日虎克写给牛顿的一封私人信件里，他采用了一种十分委婉的措辞："我认为你的设计和我的（光学理论）同样都是以发现真理为目标，因此我认为我们也同样都能忍受那些反对意见。"牛顿决定和他玩同样的游戏。在 1676 年 2 月 5 日牛顿给虎克的复信中[131]，他写道："笛卡儿在这方面取得了很大成就（指笛卡儿在光学领域的思想），你又增加了很多方法，特别是把薄片的光辉带入了哲学的思考中①。如果说我看得更远的话，是因为我站在了巨人的肩膀上。"由于虎克远称不上巨人，他个子很矮，并且患有严重驼背，所以牛顿这句广为流传的名言的真实意思只是表明，牛顿觉得自己绝对不欠虎克任何东西！牛顿利用所有可能的机会侮辱虎克，声称他的理论足以让"（虎克）所有说过的话"完全作废，他甚至拒绝出版自己的《光学》，直到虎克去世以后才出版，这些事实表明引用这句话的解释时不能太过于牵强。两人之间长期的不和[132]在研究引力理论时进一步加剧，达到了巅峰。当听说虎克对其他人说他才是引力理论的创始人时，牛顿怀着报复的心理用一种一丝不苟的态度从他关于引力理论著作的最后一部分参考文献中，删除了所有出现了虎克名字的地方。牛顿在 1686 年 6 月 20 日给他的朋友、天文学家埃德蒙德·哈雷（Edmond Halley，1656—1742）的信中写道：

---

① 指虎克用他的复合显微镜观察树皮切片后发现了什物细胞，这是人类历史上第一次成功观察细胞。——译者注

> 他（虎克）应当因为他的无能而原谅他自己。他的文笔平淡如水，毫无文采可言，他甚至根本不知道怎么表达。现在这样不是很好吗？有一些数学家，他们满足于通过乏味的计算和单调的劳动来发现、处理和解决所有事务，还有一些数学家，他们只会假装发现了所有真相，这两类人肯定是在窃取那些追随他们的人以及那些走在他们之前的人的所有发明。

牛顿在这里极其清楚地表达了为什么他认为虎克不值得拥有任何荣誉，是因为虎克不能用数学语言阐述他的思想。事实上，用抽象的数学公式进行总结才是使牛顿的理论真正引起人们关注的特点，所有的自然规律全部被精确地表达成如水晶般清晰、自相一致的数学关系，正是数学内在的精确和深刻使牛顿的发现由单独的理论上升到了不可动摇的自然规律的高度。与此形成鲜明对比的是，虎克的理论虽然在很多方面也体现出了独创性，但总体上而言，不过是直觉、推测和猜想的集合[133]。

长期以来一直被认为已经遗失了的、英国皇家协会在1661年至1682年间的会议记录，在2006年2月被人们在一个很偶然的机会下，从英格兰汉普郡的一所普通房间的橱柜里找到了，据说它们已经在那个地方尘封了50年以上。在这批珍贵的羊皮纸文稿中，其中有超过520页的内容是由罗伯特·虎克亲笔记录。在1679年12月的一次会议的记录中，描述了虎克和牛顿之间的通信情况，在这些信件里他们讨论了一个证明地球在自转的实验。

让我们重新回到牛顿的科学成就上。牛顿吸收了笛卡儿的宇宙能用数学描述的思想，并通过他自己的工作把这一思想变成了现实。在他那本不朽的名著《自然哲学的数学原理》（*The Mathematical Principles of Natural Philosophy*，通常被称为《原理》）的序言中，牛顿声称[134]：

> 我们把这本书当做哲学的数学原理，是因为似乎所有哲学

> 的主题都在其中。我们从运动的现象探索自然的动力，接着又从这些动力中证实其他的现象。最终，这些工作引出了第一卷和第二卷的结论。在第三卷中我们提供了一个例子以说明世界这个系统。因为在前两卷中我们已经给出了数学证明，在第三卷中我们将从天体现象直接得出引力效应使得物体朝太阳和行星运动的结论。从那些引力效应，以及其他同样用数学证明了的命题中，我们可以推导出行星、彗星、月亮和大海的运动。

当我们认识到牛顿真的实现了他在《原理》序言中所许诺的所有事情时，我们唯一可能的反应是：哇喔！牛顿对笛卡儿著作怀疑式的暗讽也是显而易见的——他把他的书名定为《数学原理》，正好和笛卡儿的名著《哲学原理》相对。甚至在他那本更加强调以实验为基础、以对光的研究为主要内容的著作《光学》[135]一书中，牛顿依然使用了同样的数学推理和方法论。在《光学》的一开始他就写道："在这本书里我并不是用臆断来解释光的属性，而是以实验和推理提出和验证光的属性，这是为了阐释我随后提出的定义和公理。"之后，牛顿利用简洁的定义和命题使全书看起来有点像是讨论欧几里得几何学的著作。最后，在书的结论部分，牛顿补充了几句话作为进一步的强调，他说："在数学中，同样也在自然哲学中，当探索难处理的事物时，分析法从来都应当先于综合法。"

牛顿利用他的一整套数学工具所做出的伟大业绩是超乎一般人想象的。这位天才出生的那一年与伽利略离开人世是同一年，这是历史的巧合吗？他用数学公式系统地阐述了力学基础原理，破译了行星运动的规律，为解释光和色彩现象的本质建立了理论基础，并且开创了对微积分的研究。这些成就中，哪怕只是其中一项，也足以让牛顿在人类历史上最卓越的科学家行列里占有一席之地。正是他在引力理论方面所做的工作，把他推向了魔法师讲台的最高处——那里是为人类最伟大的科学家

所保留的位置。牛顿的这项工作在天空和地球之间架起了一座桥梁，融合了天文学和物理学，并且使整个宇宙都置于数学这一把伞下。那么，牛顿的伟大著作《原理》是如何诞生的呢？

我开始思考月亮上的引力

威廉·史塔克利（William Stukeley，1687—1765）是一位收藏家和物理学家，他是牛顿的朋友（尽管他们的年纪相差 40 岁），也是牛顿这位伟大的科学家的第一位传记作者。在他所撰写的《艾萨克·牛顿爵士生平回忆录》（*Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*）[136]中，我们读到了这则科学史上最富传奇色彩的故事：

> 1726 年 4 月 15 日，我去艾萨克爵士位于肯辛郡奥贝尔楼的公寓里作客，我们俩在一起待了整整一天，并且一起共进了晚餐。晚饭后，天气变得暖和起来，我和他一起来到花园里，坐在一颗苹果树下喝着茶，当时就我们两个人在那里聊天，他告诉我他就是在这种环境下（1666 年牛顿因为瘟疫不得不从剑桥回到家乡），引力这个念头突然进入了他的脑海。那时他正陷入沉思，一个从树上落下的苹果打断了他的思考并引起了他的注意。他想，为什么苹果总是垂直地落向地面？为什么它们总是落向地球的中心，而不是斜着掉下来，或者干脆向上飞？确信无疑的是，是地球拽着它们下落。一定有一种相关的拉力作用于苹果，并且这种与地球有关的拉力之和的方向是向着地心的，而不是向地球侧面。只有这样，才能使得苹果垂直下落，或者说落向地心。因此，如果说一个物体拉另一个物体，那么这种拉力肯定与它们的质量有比例关系。这个苹果也在拉地球，正如地球吸引苹果一样。这样就可以说有一种力量——我们称之为引力，这种引力可以扩展到整个宇宙中……这就是那个令人

叹服的发现诞生的过程。借由这一理论，牛顿在一个坚实的基础上证明了他的哲学思想，并且震惊了全欧洲。

不论这个神秘的苹果是不是真的在 1666 年落在了牛顿面前[137]，但是这个传说从一个侧面揭示了牛顿的天才和他独一无二的深邃思考。毫无疑问的是，牛顿第一次写下关于引力理论的手记是在 1669 年之前，他并不需要从物理上观察一个下落的苹果，以此来知道地球在吸引它表面的物体。他在系统阐述宇宙的引力规律时所表现出的不可思议的洞察力也肯定不是仅仅源自于一个从树上掉下来的苹果。事实上，有证据表明，牛顿在确切地阐述普遍存在的引力效应时，有几个关键概念是必需的，而它们直到 1684 年和 1685 年间才被牛顿真正认识到。在科学发展的历史上如此重要的概念是极为少见的，甚至是那些拥有非凡才智的科学家，例如牛顿，也不得不经历长时间的思考和探索才能发现它。

这一切也许在牛顿年轻的时候就已经开始了[138]。在偶然的一次机会下，他看到了欧几里得的那本非常有影响力的著作《几何原本》。根据牛顿本人的说法，他第一次"仅仅只是读了读其中论点的标题"，因为在他看来那些命题太容易理解了，他甚至"怀疑所有人都可以写出其中任何一个证明，以此作为他们消磨时光的娱乐。"第一个引起他的关注，并让他在那本书中划了几道线的命题是"直角三角形斜边的平方等于两条直角边的平方和"，也就是著名的毕达哥拉斯定理。也许这让你有点吃惊，尽管牛顿在剑桥三一学院时的确读过几本数学方面的书，但绝对有很多在当时可以轻易弄到手的数学著作他都没读过。很明显，他觉得他不需要那些知识。

对牛顿的数学和科学思考影响最大的一本书，正是笛卡儿的《几何》(*La Géométrie*)。牛顿在 1664 年读到了这本书，之后他又反复读了好几遍，直到"完全掌握了这本书"。函数的概念所提供的灵活性，以及其中

的自由变量，似乎为牛顿提供了无限的可能。不仅是解析几何，以及与之相关的笛卡儿在函数、切线和曲线方面的探索，为牛顿创建微积分铺平了道路，而且牛顿那内在的、固有的科学精神被真正地点燃了，闪烁着耀眼的光芒。过去使用直尺和圆规进行单调乏味的作图以解答几何问题的时代一去不复返了，取而代之的是用数学表达式代表任意曲线。然而1665年至1666年，一场恐怖的瘟疫袭击了伦敦，每周死亡人数高达数千，剑桥大学被迫关闭，牛顿也不得不离开学校回到他位于乌尔索普（Woolsthorpe）山谷的家乡。在那个偏僻、安静的小山村里，牛顿第一次证明，能让月亮绕地球运行的力量和地球的重力（正是这种力量使得苹果从树上掉了下来）事实上是同一种力量。牛顿在1714年左右写的一份备忘录中记录了他的那些早期尝试[139]。

> 在同一年（1666年），我开始思考将重力概念延伸到月亮上，并且我已经发现了如何计算引力，正是这种引力使天体在一个球面上旋转。根据开普勒定律，行星运动周期与它们距离轨道中心的距离形成一倍半的比例关系，由此我推断出，让行星在轨道上运动的那种力量，一定与行星距离轨道中心的长度的平方成反比。由此，在比较让月亮保持运动轨道所必需的力量，和地球表面的重力这两个力的数值时，我发现它们极其接近。所有这些工作都是在发生瘟疫的那两年（1665年与1666年之间）完成的，那几年也是我作发明研究的黄金时期，并且我比在那之后的任何时间都更专注于数学和哲学。

牛顿在这里所指的重要推断（基于开普勒行星运动定律的）是两个球体之间的引力与它们之间的距离平方成反比例关系。换句话说，如果地球和月亮之间距离是现在的3倍，那么地球和月亮的吸引力将以9倍的速度递减（3的平方等于9）。

因为某些至今也未能完全明了的原因[140]，在这之后，牛顿实质上放弃了对引力和行星运动进行更深入的研究。直到 1679 年，来自他一生的竞争对手罗伯特·虎克的两封信又重新唤起了他对力学的关注，特别是行星的运动引起了他的高度重视。牛顿的好奇心又被点燃了，其后果是戏剧性的。利用他先前系统阐述的力学原理，他证实了开普勒行星运动第二定律，并指出行星围绕太阳在椭圆形轨道上运行时，行星与太阳之间的连线在相等时间间隔内扫过的面积相等（如图 4-8 所示）。他还证明了“天体在椭圆轨道上运行时……引向椭圆焦点的吸引力与距离的平方成反比”。这是通向《原理》之路的重要奠基石。

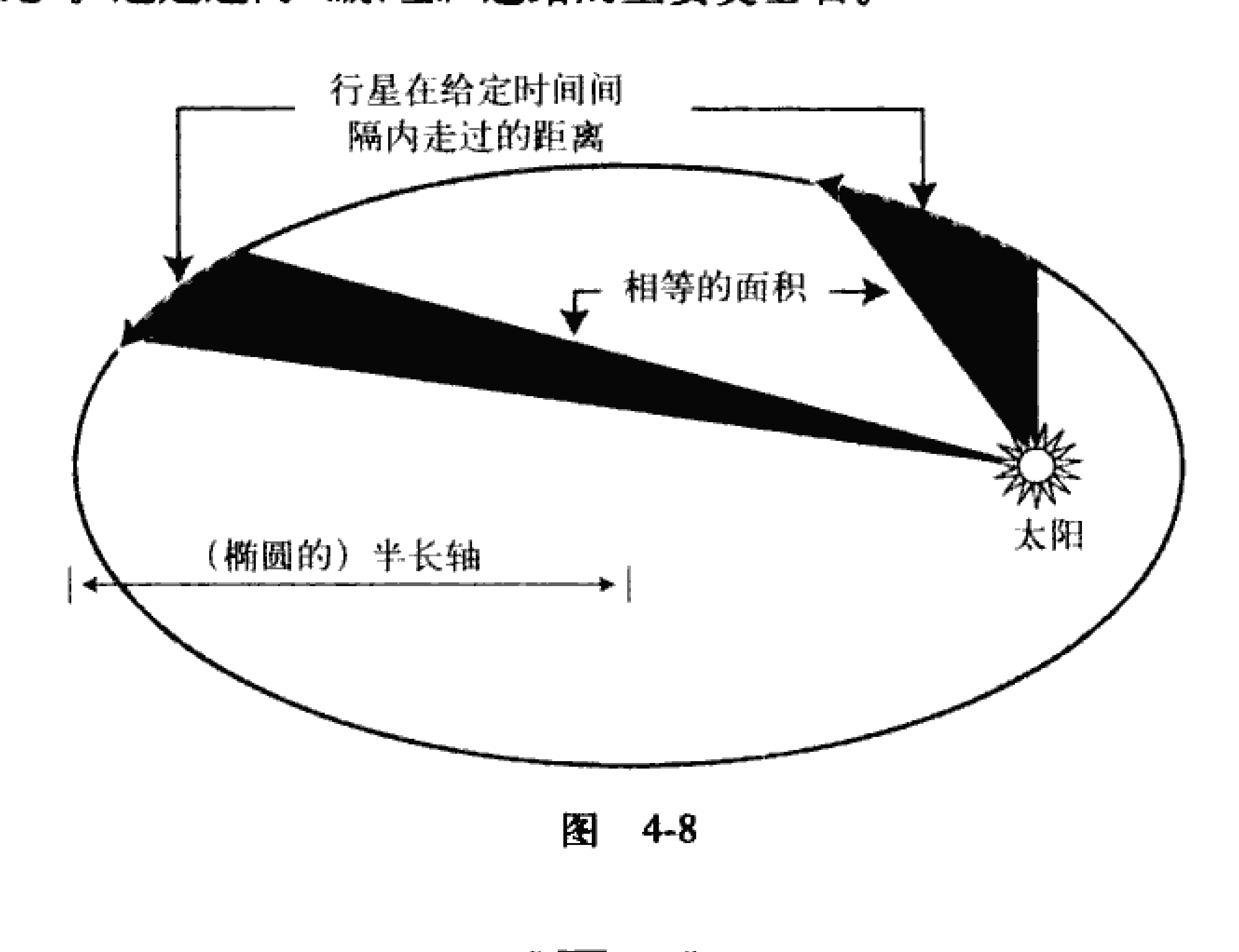


图　4-8

《原理》

在 1684 年的春季或夏季的某一天，哈雷去剑桥拜访牛顿[141]。在此之前，哈雷曾经和虎克以及著名的建筑学家克里斯托弗·瑞恩（Christopher Wren，1632—1723）讨论过开普勒行星运动定律。他们在咖啡馆里交流时，虎克和瑞恩都说自己在几年前就已经推断出引力与距离的平方成反比

这一规律了，但是他们两个不能从这个推断中构建出一个完整的数学理论。哈雷决定问牛顿一个至关重要的问题：能根据行星引力与距离平方成反比这一规律得出行星形成的轨道是什么样子吗？让他感到极其震惊的是，牛顿脱口而出是个椭圆，并且告诉他早在几年前他就已经证明出来了。数学家亚伯拉罕·棣莫弗（Abraham de Moivre，1667—1754）在一份备忘录中记录了这个故事（图 4-9 展示的是这份备忘录的其中一页）。

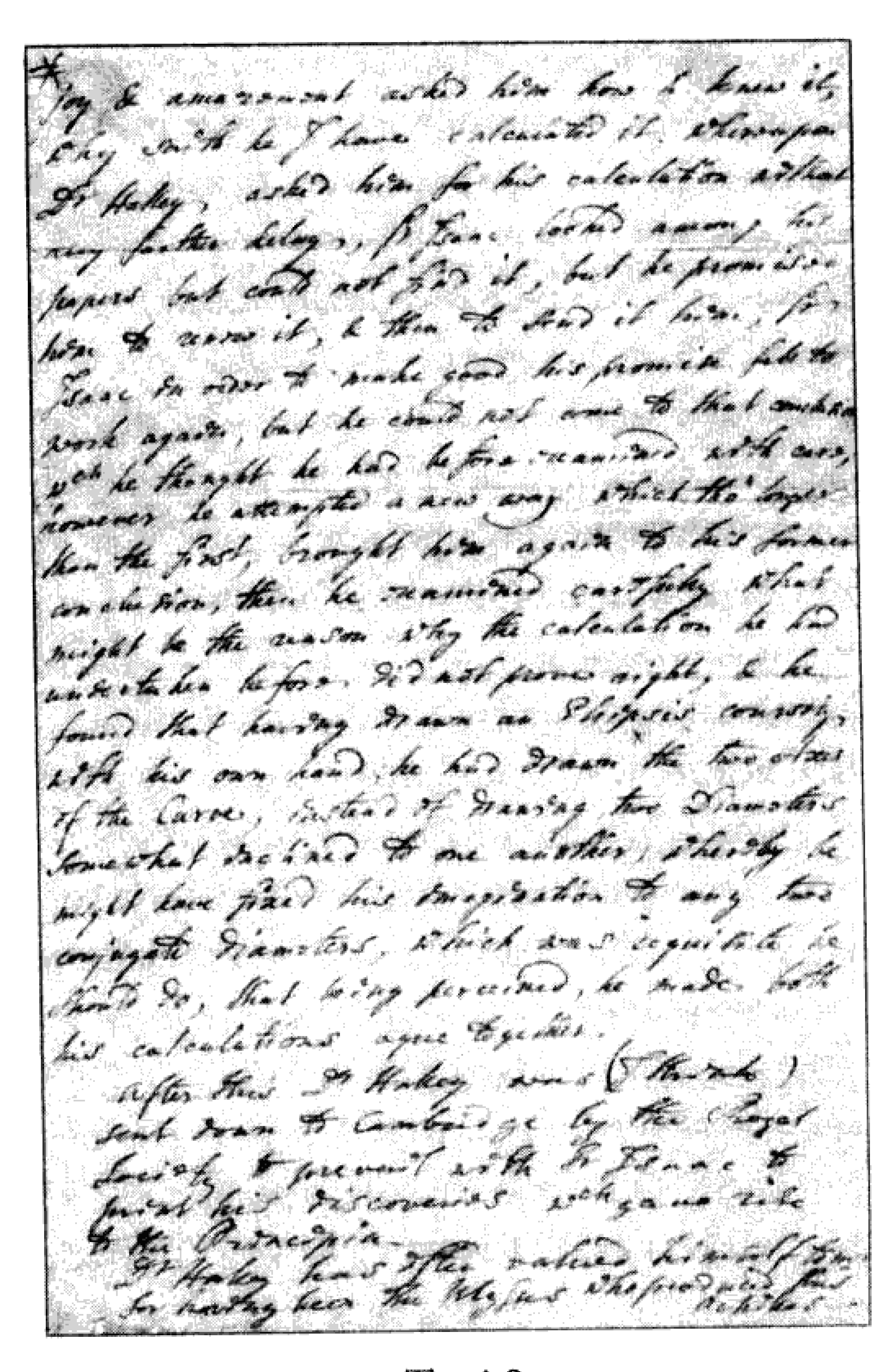

* Joy & amazement asked him how he knew it,
why saith he I have calculated it, whereupon
Dr Halley asked him for his calculation without
any farther delay, Sr Isaac looked among his
papers but could not find it, but he promised
him to renew it, & then to send it him, Sr
Isaac in order to make good his promise fell to
work again, but he could not come to that conclusion
wch he thought he had before examined with care,
however he attempted a new way which tho' longer
then the first, brought him again to his former
conclusion, then he examined carefully what
might be the reason why the calculation he had
undertaken before did not prove right, & he
found that having drawn an Ellipsis coursorily
with his own hand, he had drawn the two Axes
of the Curve, instead of drawing two Diameters
somewhat inclined to one another, whereby he
might have fixed his imagination to any two
conjugate Diameters, which was requisite he
should do, that being perceived, he made both
his calculations agree together.
After this Dr Halley was (I think)
sent down to Cambridge by the Royal
Society to prevail with Sr Isaac to
print his discoveries which gave rise
to the Principia.
Dr Halley has often valued himself for
for having been the Ulysses who produced this
Achilles.

图 4-9

> 在 1684 年，哈雷先生去剑桥拜访他（牛顿），在聊天中哈雷问牛顿，他认为哪种曲线能够符合那个猜想，也就是行星和太阳之间的吸引力与他们之间的距离平方成反比。艾萨克·牛顿马上回答说那一定只有椭圆才符合（这一猜想）。哈雷乐不可支并惊奇地问他怎么知道的，牛顿说是他计算得出的，于是哈雷要求马上看看他的计算过程，牛顿在他的论文里翻了半天但却没有找到，不过他向哈雷许诺会重写一份后寄给他。

哈雷的确在 1684 年 11 月再次拜访了牛顿，但在他的这两次拜访时，牛顿都在紧张地工作，棣莫弗给了我们一段非常简短的描写：

> 艾萨克先生为了履行他的承诺，一头埋入了工作（再次），但是他却得不出和以前一样的结论，而这个结论他一直以为自己过去已经完成了并且还仔细检查过了的。不得已之下，他试图用另一种方法进行证明，这种新方法比前一种要麻烦，不过最终他得到了与之前一样的结论。接下来，牛顿再次仔细检查为什么采用第一次的计算方式得不出正确结果……用这两种方式他都给出了一致的答案。

这段干巴巴的概括性描述甚至没有打算告诉我们，哈雷两次拜访之间的几个月中牛顿究竟完成了什么工作。事实上，他完整地写了一本专著《物体在轨道上的运动》（*The Motion of Revolving Bodies*）。在这本书里，牛顿证明了大部分天体运动的轨迹是圆形或椭圆形的，证实了开普勒的所有行星运动定律，甚至解决了微粒在阻尼介质中的运动问题（例如在空气中）。哈雷为牛顿的才智所倾倒，他对牛顿的工作十分满意，他极力劝说牛顿将他所有这些令人难以置信的发现结集出版，于是《原理》最终诞生了！

刚开始时，牛顿本人并不觉得他的这本书有什么重要的，他个人认为，这只不过是他那本《运动》在某种程度上的拓展，是补充了一些细节后的另一个版本。然而当他开始着手写作时，他意识到其中一些内容需要更深入地思考，特别是有两个地方不断困扰着他。第一个问题是：牛顿起初在系统阐述他的引力定律时，他把太阳、地球和行星当做数学上的质点群（point mass）来研究，并没有考虑它们自身的大小。他当然知道这是不符合实际情况的，因此当这一理论应用在实际的太阳系中时，牛顿把计算得出的结果仅仅视为一个近似解。有人甚至猜测正是因为他自己对这个问题的研究状况极不满意，才在1679年后再次放弃了对引力这个课题的研究[142]。当考虑到作用在苹果上的力时，情况变得更加复杂。很明显，苹果与其下面正对着的那部分地面之间的距离最短，要远小于苹果与地球其他部分的距离，那么如何计算苹果受到的净吸引力呢？天文学家赫伯特·霍尔·特纳（Herbert Hall Turner，1861—1930）在1927年3月19日的《伦敦时报》上发表了一篇文章，记录了牛顿当时的思想斗争：

> 在那时，他已经认识到了物体间的引力与它们之间距离的平方成反比，但是他也发现如果把这一理论用于实际时会有一些难以克服的困难，而这是那些缺乏头脑的人根本没有意识到的。其中最重要的一个问题甚至在1685年之前都没有得到很好的解决……这就是如何把地球与相距十分遥远的物体（例如月球）之间的吸引力和地球与相距十分接近的物体（例如苹果）之间的吸引力统一起来。前一种情况下，组成地球的不同微粒（牛顿希望把他的定律拓展到地球，并最终使它成为普遍规律）与月亮的距离很远，无论是大小或方向都与此距离无太大不同，但是与树上的苹果很近，这同其大小和方向相比都有显著

> 差异。在后一种情况下，如何把这些分散的吸引力叠加在一起或组合成一个单独的结果？并且“重力的中心”如果真的存在的话，它们能聚集吗？

最终的突破性进展是在 1685 年春季出现的。牛顿设法证实了一条非常重要的定理：球体间的吸引力与这两个球体球心之间距离的平方成反比。也就是说，这两个球就好像是两个点群体一样，球体之间的引力集中在这两个球心。这一优美简洁的证明，得到了数学家詹姆斯·惠特莱德·李·葛拉雷（James Whitbread Lee Glaisher，1848—1928）的高度赞赏。葛拉雷在纪念牛顿《原理》出版两百周年纪念会（1887 年）上的演讲中说道[143]：

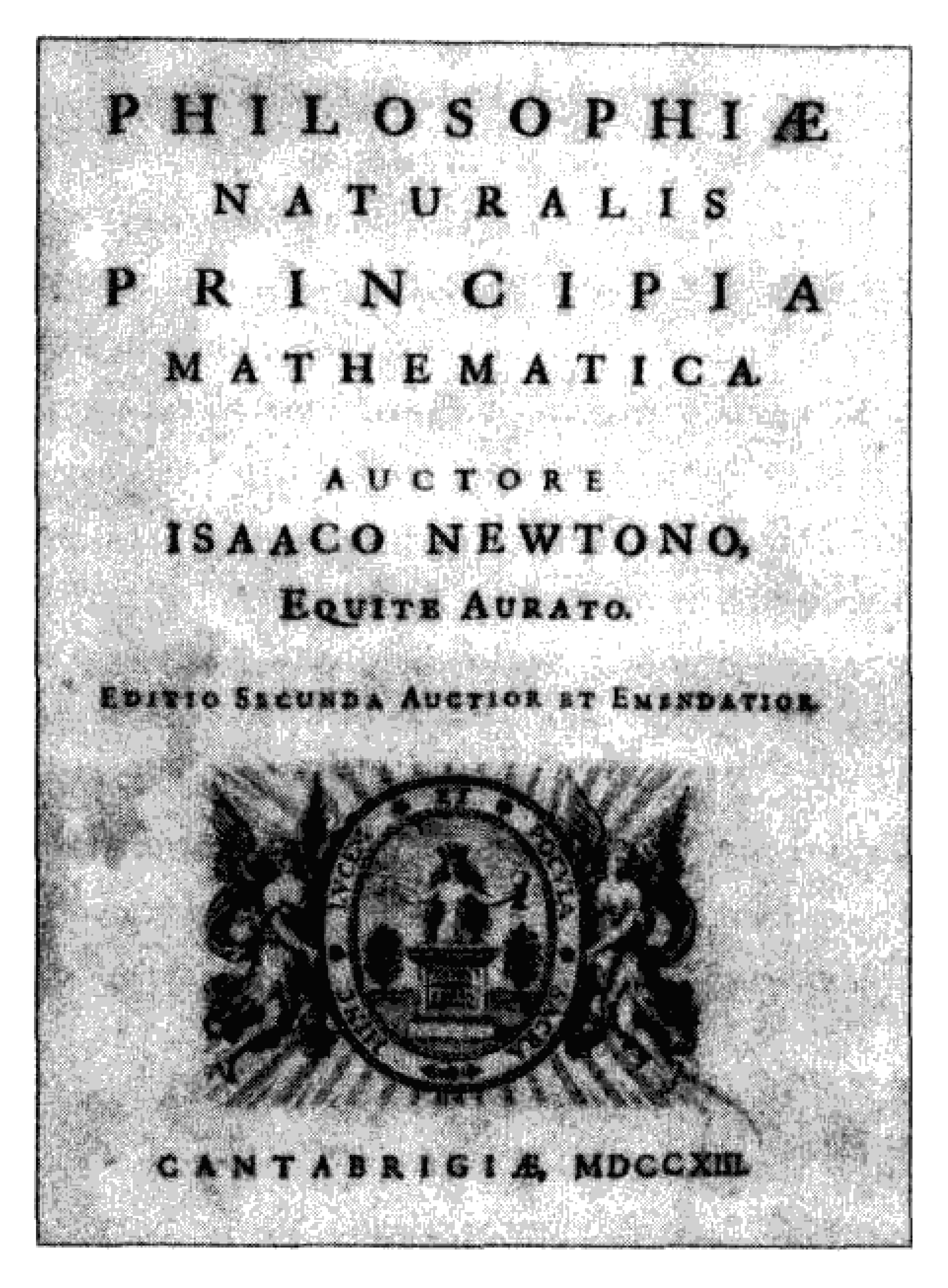
> 我们从牛顿自己的著作中得知，在这一理论从他的数学研究产生之前，他都没有期望得到这么完美的结论。而一旦牛顿证实了他那超群的理论，所有的宇宙原理都展现在了他眼前。在牛顿眼中，这些命题是有很大区别的，特别是当他认识到那些理论当应用于太阳系中时，只是近似正确的结论而不是真正精确时，这种区别更加凸现了出来。我们可以想象这种由近似到精确的突然转换，激励牛顿更加努力地工作。正是由于他的聪明才智，今天我们才可以把绝对精确的数学分析应用于实际的天文学问题中。

在牛顿勾勒《原理》草稿时，另外一个一直给他带来巨大困扰的问题是他完全忽视了行星对太阳的引力效应。换句话说，在牛顿早期的理论阐述中，他把太阳抽象为一种固定不动的、纯粹的力的中心，他认为这在现实世界中“几乎不可能存在”。这种方案本身与牛顿自己的运动第三定律相矛盾。根据牛顿运动第三定律，“两个物体间的作用力与反作用

力总是大小相等、方向相反"，每颗行星吸引太阳的力应当与太阳吸引行星的力完全相等。接下来他补充道："两个物体（例如地球和太阳）之间一定有作用力和反作用力。"这个看起来似乎并不是十分重要的认识，事实上引出了万有引力概念。我们可以试着猜出牛顿的思考路线图：如果太阳对地球有某种拉力，那么地球也在用同样的力量拉着太阳。这就是说，不是地球简单地围绕太阳在轨道上运行，而是它们都围绕共有的引力中心旋转。但这并不是问题的全部，在太阳吸引行星的同时，所有其他的行星同时也在吸引着太阳，而且事实上每颗行星所受的吸引力不仅仅来自太阳，也来自其他行星。类似的逻辑也适用于木星和它的卫星，适用于地球和月亮，甚至适用于苹果和地球。然而牛顿的结论却简洁得令人震惊——只有一种引力，这种力在宇宙任何地方的任意两个物体之间都起作用。这就是牛顿需要的全部。《原理》的拉丁文版本有 510 页，在 1687 年 7 月正式出版发行。

牛顿进行的实验和观察的精确度大约只有百分之四，可从中他建立了引力的数学定理，其精确度甚至超过了百万分之一。他第一次把对自然现象的解释和对观察结论的预测这两种力量统一起来了。从此以后，物理学和数学就永远交织在一起了，而科学与哲学的分离也成为了必然。

在经过牛顿的粗放式编辑以及数学家罗杰・高迪斯（Roger Cotes，1682—1716）的细致编辑之后，《原理》的第二版在 1713 年问世了（图 4-10 展示的是这个版本的封面）。虽然高迪斯为这本书同样付出了极大心血，但牛顿为人向来不热情，这一次也不例外，他甚至在这本书的前言中没有提到高迪斯的名字。只有高迪斯因患严重感冒，年仅 39 岁就不幸英年早逝之后，牛顿才表现出了感激："如果他还在世的话，我们可能会了解更多的东西。"



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.

CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

图　4-10

奇怪的是，牛顿关于上帝的最重要的一些评论，在第二版中却是以补述的形式出现的。在 1713 年 3 月 28 日他给高迪斯写了一封信，当时距离《原理》完整的第二版正式发行不到 3 个月时间了，牛顿在信中写了一句话："从（自然的）现象讨论上帝属于自然哲学，这是确信无疑的。"事实上，牛顿在"通用批注"中表达了他对于"永恒存在、涵盖所有、无所不能、无所不知的"上帝的看法，他把这一部分内容当做对《原理》的最后润色。

但是上帝的角色在这个不断扩大的数学的宇宙中还能保持不变吗？或者上帝是不是被发觉越来越像个数学家了？毕竟在发现万有引力定律之前，行星的运动一直被理所当然地认为是上帝的工作。牛顿和笛卡儿

如何看待对于自然的科学解释的不同侧重点呢？

牛顿和笛卡儿的数学家上帝

与他们那个时代的大多数人一样，牛顿和笛卡儿都是虔诚的基督教徒。一位笔名叫伏尔泰（Voltaire，1694—1778）的法国作家，他写下了大量关于牛顿的文章，曾经有一句名言："如果上帝真的不存在的话，对我们人类而言，发明他是十分必要的。"

在牛顿看来，世界的真实存在[144]和人类观察发现的宇宙表现出的数学规律性都是上帝存在的证据。这种因果关系是神学家托马斯·阿奎奈（Thomas Aquinas，约1225—1274）第一次提出来的，与此相关的论证一般被认为属于哲学的宇宙论和目的论范畴。简单地说，宇宙论声称，既然物理世界是现实存在，那么就一定有一个终极原因，也就是创世主上帝。目的论，或者叫设计论证，试图从世界的这种明显的设计痕迹证明上帝的存在。牛顿在《原理》中这样表达了他的思考："太阳、行星和彗星构成的这种最美丽、最完美的系统，只能是产生于某种智慧、强大的存在的想法，并受其支配。如果天空中的恒星是另外一些星星的中心，它们同样形成了很多系统，这些系统也是通过类似的智慧存在形成，它们也一定都服从于那个唯一的存在的支配。"宇宙论、目的论，以及其他类似的作为上帝存在证据的理论，其正确性[145]已经在哲学家那里争论了几个世纪了。我个人的感想是，有神论者不需要那些论证来坚定他们的信仰，而无神论者也同样不会因它们而被说服。

然而牛顿从他的规律的普遍性出发，又为这些争论增加了新的内容。他把整个宇宙受相同的规律支配并且表现出某种稳定性这一事实，当做存在上帝控制之手的进一步证据。他说："特别是，由于来自恒星的光线与来自太阳的光线性质是相同的，从每一个系统射出的光线也进入了所有其他的系统。并且至少固定星星构成的系统，通过各自的引力，应当

彼此作用和牵引，上帝（他）已经把这些系统分开得极其遥远了。"

在《光学》这本书中，牛顿清楚地表明了他不相信自然规律本身能充分解释宇宙的存在，他认为上帝是组成宇宙物质的原子的创造者和(秩序的）维持者。他说："因为创造了（原子）的上帝让他们（原子）变得有序。并且如果他这么做了，那么寻找其他的世界起源，或者假装仅仅通过自然法则就有可能产生混沌是违背哲理的。"换句话说，在牛顿眼中，(相对于其他角色）上帝首先是一位数学家，这不是一个比方，而几乎是真实存在的——创世主上帝把存在引入了受数学法则支配的物理世界。

与牛顿相比，笛卡儿的观点更富有哲学味，他对证实上帝存在的相关理论极其关注。他认为，从我们自己的存在（"我思故我在"）中反映出的确定性，到我们编织客观科学绣帷的能力，这些都是至高无上、完美的、上帝存在的牢不可破的证明。笛卡儿坚持认为这个上帝是所有真理的最终源头，也是人类推理可靠性的唯一保证。这种怀疑的循环性理论（也就是众所周知的笛卡儿循环)，在笛卡儿的那个时代就已经有人提出批评了，特别是法国哲学家、神学家和数学学安东亚尼·安托万(Antoine Arnauld，1612—1694）对此提出了强烈的质疑。安托万提出了一个问题，这个问题以它的简洁有力而引人瞩目：如果我们需要证明上帝存在的目的是为了保证人类思考过程的正确性，那么我们如何才能确信那些产生于人类思维中的证据是完全正确的呢？虽然笛卡儿付出了极大心血试图想从这个有缺陷的循环中脱身而出，许多追随笛卡儿的哲学家并没有发现他的努力能让他们特别地信服。笛卡儿关于上帝存在的那些"增补证明"同样也是有问题的。它们通常被归入哲学的"本体论"范畴。埃特伯雷的哲学神学家圣安塞尔姆（St.Anselm，1033—1109）在1078年首次比较系统地阐述了这种类型的推理之后，在历史上本体论又多次以其他形式出现。它的逻辑构建过程是这样的：根据定义，上帝是完美的代表，是人类可以想象到的最伟大的存在。但是，如果上帝不存

在，就可能还会想象出一个更伟大的存在，他除了拥有上帝所有的完美之处外，还有其他上帝不曾拥有的。这将与上帝是最伟大的存在这一定义产生矛盾。因此，上帝不得不存在。按笛卡儿的话说："存在不能从上帝的本质属性中剥离，正如三角形的三个内角之和等于两个直角(之和)，这是三角形的本质属性，不可能从三角形的属性中剥离出去。"

这种逻辑的技巧[146]并不能让更多哲学家们信服，他们坚持认为在物理世界中证明任何意义重大的存在物，而且特别是像上帝这样的伟大存在，仅仅依靠逻辑的力量是不充分的。

奇怪的是笛卡儿因为鼓励无神论发展的罪名被控告，他的著作在1667年被送往天主教会的禁书审定委员会审查。笛卡儿一贯坚持上帝是最终的真理保证，这可真是一个荒诞的指控。

为了继续我们正在讨论的主题，这里把哲学问题放在一边。在笛卡儿关于上帝的观点中最有趣的一个是笛卡儿认为上帝创造了所有"永恒的真理"。特别是，他声称"所有你认为永恒的数学真理事实上已经被上帝制定好了，并且同他其他的创造一样完全依靠他。"因此，笛卡儿的上帝不仅是一位数学家，在某种意义上他还是数学世界和物理世界的创造者。而这两个世界都是全部建立在数学基础之上的。根据这种在17世纪末极为流行的世界观，很明显，人类只能发现数学而不能发明数学。

更重要的是，伽利略、笛卡儿、牛顿的著作从根本上改变了数学和科学两者之间的关系。首先，科学上爆炸式的、大量涌现的新发明为数学研究提供了强劲动力。其次，通过牛顿的定律，甚至是最抽象的数学领域，例如微积分，也成为了物理解释的本质要素。最后，也许是最重要的一点，数学和科学之间的界线完全改变了原有的形态，它变得模糊了，数学分析和科学广阔探索几乎完全融合在了一起。所有这些发展都极大地激发了数学家的热情，这大约是古希腊时代以来从未有过的。数学家感到世界在那里等待被征服，并且有无数可能的新发现。

第 5 章

统计学家和概率学家：不确定的科学

我们周围的世界并不是静止的、一成不变的。我们身边的绝大多数事物，要么正在运动中，要么处于不断变化中。甚至我们脚下看起来十分稳定的地球，事实上也在时刻不停地围绕它的轴进行着自转，同时又在围绕太阳公转，并且还（与太阳一起）围绕银河的中心旋转。我们呼吸的空气实际上是由数以亿计的微粒组成的，它们无时无刻不在漫无目的地移动着。在同一时刻，树木在生长，放射性元素在衰减，大气温度根据季节变化每天都有升降差异，并且人类对生活的期望值也在不断增长。这种宇宙中无处不在的、永不停息的运动，并没有难住数学。利用由牛顿和莱布尼茨引入的一个数学分支，也就是众所周知的微积分[147]，我们可以对运动和变化进行严谨的分析和准确的建模。今天，这项极为有效的工具得到了十分广泛的应用，它可以用来解决多种多样的问题，例如，宇航飞船的运动轨道计算，或者传染病的传播扩散分析等。正如在拍电影时，通过把运动分解为一帧接一帧连续的画面，就可以捕捉到运动的瞬间一样，通过这种细微的栅格，微积分可以测量变化，而这种栅格允许对非常短暂的现象定量测定，例如瞬时的速度、加速度或变化的比例。

沿着牛顿和莱布尼茨这样的巨人的步伐，理性时期（17 世纪晚期到

18 世纪）的数学家进一步拓展了微积分，将它发展为一门更有效、应用范围更广阔的数学分支，这就是微分方程。装备了这种新式武器之后，数学家们可以从细节上为各种各样、纷繁复杂的现象从数学理论上提供解释，从小提琴的弦产生音乐的奥秘、热的传导、喷泉顶部水花的运动，到水和空气的流动，可谓无所不包。一时间，微分方程成为物理学研究所必需的工具。

首先为探索微分方程的发展开辟了新的应用前景的科学家，正是富有传奇色彩的伯努利家族成员[148]。从 17 世纪中叶到 19 世纪中叶，在这个家族里至少诞生了 8 位有影响力的数学家。而这几位才华横溢的家庭成员之间激烈的竞争[149]和他们卓越杰出的数学贡献几乎同样有名。虽然伯努利家族内部成员之间的纷争通常都与争夺数学上的权威有关，但他们争论的问题在今天看来似乎算不上最重要。尽管如此，那些错综复杂难题的解决，还是为数学本身的发展在很多方面奠定了坚实基础。但总体而言，毫无疑问，在将数学建立为各种物理过程共同的语言的过程中，伯努利家族发挥了巨大作用。

有一个故事能帮助我们理解伯努利家族中最聪明的两个成员的思维：哥哥雅各布·伯努利（Jakob，1654—1705）和弟弟约翰·伯努利（Johann，1667—1748）。雅各布·伯努利是概率论的创始人之一，在本章稍后部分我们会继续讨论他。在 1690 年，当时的一个老问题重新引起了雅各布的关注，说它“老”，是因为这个问题最早是由文艺复兴时期的代表人物达芬奇在两个世纪前提出来的，达芬奇还对它进行了认真研究。这个问题是这样的：一根灵活的但是却不能延展的链条，当它的两端固定时，它垂下来时的形状是什么样的（如图 5-1 所示）？达芬奇在他的笔记本上画了几根类似这种链条的草图。笛卡儿的朋友艾萨克·比克曼曾经向他请教过同样的问题，但没有证据表明笛卡儿试图解决过它。最终，这个问题成为数学史上一个著名的难题：悬链线问题[150]。（这个名

称来自于拉丁语 catena，意思是“一根链子”）。伽利略曾认为悬链线的形状是抛物线，但被法国耶稣教会数学家伊格内修斯·帕迪斯（Ignatius Pardies，1637—1673）证明是错误的，不过，很明显，对于从数学上真正解决它并给出悬链线正确的形状这样一个任务，帕迪斯并不能胜任。

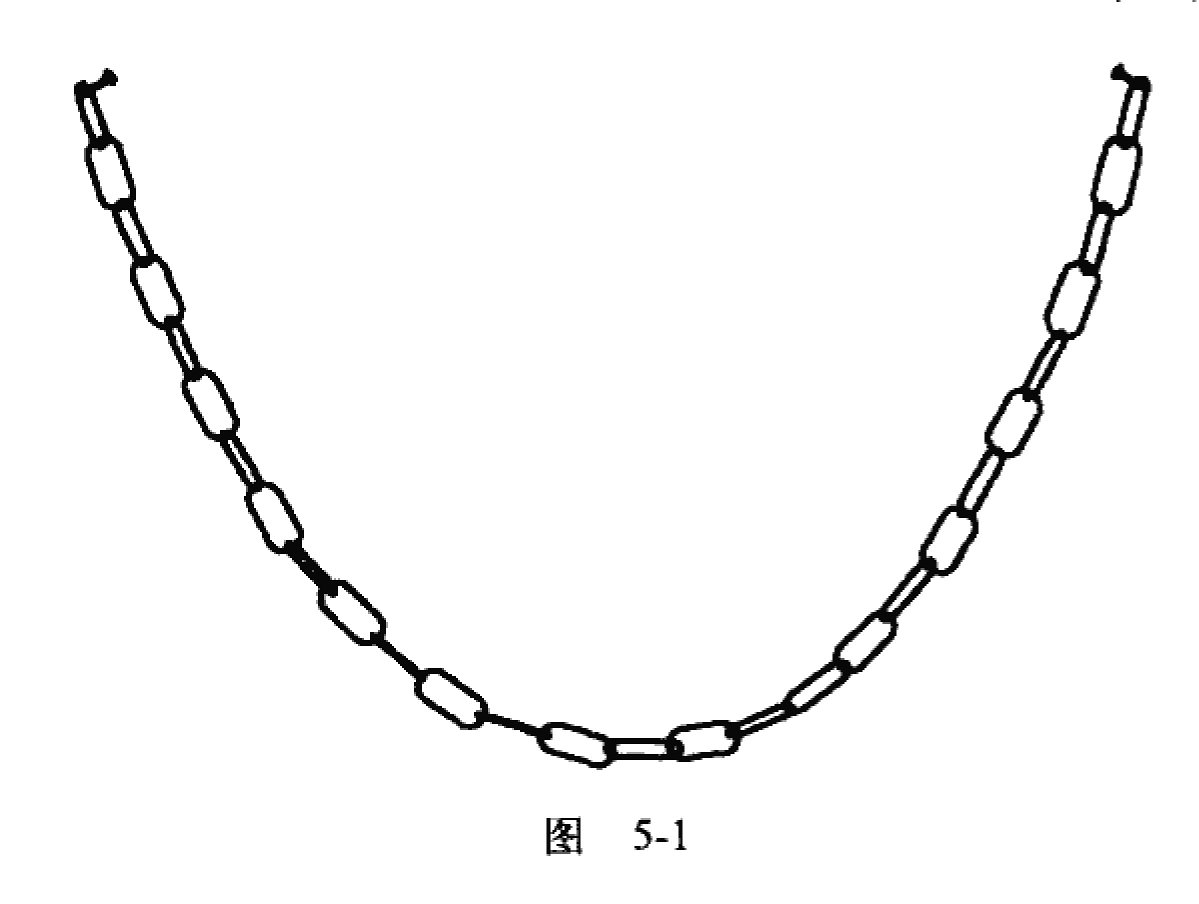


图　5-1

在雅各布·伯努利重新提出这个问题仅仅一年之后，他的弟弟约翰·伯努利给出了正确答案（他利用的数学工具就是微分方程）。莱布尼茨和荷兰数学物理学家克里斯汀·惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）也同样解决了它，但是惠更斯采用的是一种更难理解的几何方法。约翰对于他能成功地解决这个困扰了他的哥哥和他的老师的问题感到极为自得，甚至在他的哥哥雅各布去世 13 年后，仍不时得意洋洋地提起。约翰在 1718 年 9 月 29 日写给法国数学家皮埃尔·雷蒙德·蒙特莫特（Pierre Rémond de Montmort，1678—1719）的一封信[151]中，表现出了这种无法抑止的狂喜：

> 你说是我的哥哥提出了这个问题，这的确是事实；但你随后又说是他给出了这个问题的解答，这却不是真的。当他在我

> 的建议下提出了这个问题时（当时是我首先想到了这个问题），没有一个人能给出答案，包括我们俩人在内。到最后，我们甚至对解决这个问题基本上不抱什么希望了，认为它根本是无法解决的。一直到1690年，莱布尼茨在莱比锡的杂志上发表了一篇文章说他已经解决了这个问题，但是他并没有给出他的解答过程，这为其他研究人员留出了思考时间，同时也极大地鼓舞了我们，让我的哥哥和我有了重新开始研究的勇气。

在这里，约翰有点厚脸皮地把“提出这个问题”的建议也当做了自己的功劳，之后他掩饰不住内心的喜悦，继续写道：

> 我哥哥的努力没有取得什么进展，而我则比较幸运，因为我发现了足以解决这个问题的技巧，（这里我并不是吹牛，我为什么要掩盖真相呢？）它花费了我整整一个晚上的时间，直到第二天清晨，我终于把它弄明白了，我欣喜若狂，马上冲向了我哥哥的房间，当时他也在为这个戈尔迪亚斯结[①]头痛不已，并且茫无头绪，他同伽利略一样认为这个悬垂链是一条抛物线。停！停！我对他说，别再费神证明悬垂链的形状是抛物线这种说法了，因为它根本就是完全错误的……但是你却告诉我是我哥哥解决了这个问题，这简直太荒谬了。我问你，你难道真的认为，如果是我哥哥解决了这个问题的话，他会那么好心地对待我，把第一个解决了这个难题的荣誉让给我，让我与惠更斯、莱布尼茨等先生站在主席台的最前排，而他自己却不出现在这一顶尖人物组成的行列？

① Gordian knot，传说由古代弗里吉亚国王戈尔迪亚斯所挽的一个极为复杂难解的结，根据神谕，解开此结者将成为亚细亚王，亚历山大大帝直接挥剑斩断了这个结，用这样的方式将它解开了。——译者注

如果你需要证据证明数学家也有普通人的各种情感，也有一般人所具有的喜怒哀乐，只用这一个故事就完全足够了。然而家庭内部的竞争丝毫没有削弱伯努利家族的辉煌成就。在发生了悬链线问题这个小插曲之后的几年里，雅各布·伯努利、约翰·伯努利和丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700—1782）不但解决了类似悬垂链这样的问题，并且还解决了抛射体（如子弹、炮弹等）在阻尼介质中的运动，通过这些问题的解决进一步发展了微分方程。

悬垂链的故事从另一个侧面说明了数学的力量——即使那些表面上看起来微不足道的物理问题也有数学解决方案。顺便说一句，悬垂链的形状让数以百万计的旅游者在参观密苏里州的圣路易斯大拱门（Gateway Arch）时感到了愉悦。荷兰裔美国籍建筑师艾洛·萨里宁（Eero Saarinen，1910—1961）和德国裔美国籍结构工程师汉斯卡尔·班德尔（Hannskarl Bandel，1925—1993）就是以反转的悬垂链形状设计了这一标志性的建筑结构。

在发现支配宇宙行为的数学规律方面，物理学领域取得了令世人震惊的成果，这不可避免地引起了人们的疑问：类似的原理是不是也能解释生物学、社会学或经济学的活动？数学家们怀疑数学难道只是自然的语言？或者它也是人性的语言？甚至如果普遍适用的数学规律并不是真实存在的话，那么数学工具是不是至少可以被用于对人类社会行为建模并提供解释？首先，大多数数学家非常肯定，基于微积分的某些“规律”可以精确地预测所有未来的事件，无论这些事是大是小。这也是著名的数学物理学家皮埃尔·西蒙德·拉普拉斯（Pierre Simon de Laplace，1749—1827）的观点。拉普拉斯在他的五卷本的著作《天体力学》（*Celestial Mechanics*）中，第一次对太阳系中的运动给出了完整的（严格地说是近似完整的）解释。另外，拉普拉斯还回答了一个甚至连巨人牛顿都为之困惑不已的问题：为什么太阳系如此稳定？牛顿曾认为由于星

体之间的相互吸引力，行星最终将不得不落向太阳，或飞离（太阳）进入自由的宇宙空间，在解释保持太阳系的稳定和完整的原因时，牛顿借用了上帝之手来说明他的观点。拉普拉斯并不认同这样的思想，他简单地从数学上证明了太阳系的稳定周期远比牛顿先前预测的时间要长久得多。这种观点取代了牛顿所提出的，是上帝的努力才保证了太阳系的稳定。为了解决这个十分复杂的问题，拉普拉斯还引入了另外一种数学形式，也就是后来人们所知道的扰动理论，利用这一理论，拉普拉斯计算出了影响每颗行星轨道运行的众多微扰力量累积叠加后的效应。最后，拉普拉斯第一次提出了太阳系起源的模型，这一模型集中反映在他的星云假说中，他认为太阳系是由一团气态的星云收缩固化后形成的。

在认识到拉普拉斯取得的卓越成就之后，我们也许就会理解拉普拉斯在他的《关于概率的哲学思考随笔》（*Philosophical Essay on Probabilities*）[152]中那些大胆的思想和观点，并不会对此大惊小怪了：

> 所有的事件，甚至是那些看起来微不足道，并且似乎不遵循自然伟大法则的事件，事实上都是太阳公转的结果。忽略了把这类事件统一为一个完整的宇宙系统的联系，那些事件将不得不依赖终极因，而这些终极因会产生或面临危害……因此，我们应当把现在我们眼前的这个宇宙的状态看做是先前宇宙状态的结果，以及未来宇宙状态的原因。如果一种智能生物知道某一时刻所有自然运动的力和所有物体的位置，并且能够对这些数据进行分析，那么宇宙最大的物体到最小的粒子的运动，都会包含在一条简单的公式中。对于这种智能生物来说，没有任何事物会是含糊不清的，而未来也只会像过去一样出现在他面前。与这个智能生物相比，人类在天文学上的理论，仍然不具有很强的说服力。

也许你对拉普拉斯在这个假说里所提出的那个至高无上的“智能生物”有疑问。实际上，拉普拉斯在这里所说的智能生物并不是上帝。与牛顿和笛卡儿不同，拉普拉斯并不是一位虔诚的教徒。后来，当拉普拉斯把他的《天体力学》献给拿破仑·波拿巴时，由于在这之前已经从其他人那里听说了拉普拉斯在这本书中并没有涉及上帝，所以拿破仑问他：“拉普拉斯先生，他们告诉我说你在写这部关于宇宙系统的宏篇巨著时甚至没有提及它的创造者？”拉普拉斯迅速地回答道：“是因为我不需要那种假想。”被逗乐了的拿破仑把拉普拉斯的回答当做笑话讲给了数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日（Josph-Louis Lagrange）。拉格朗日惊奇地说：“啊！这是一个优美的假想，它能解释许多事情。”故事到这里并没有完，当拉普拉斯听说了拉格朗日的反应后，他淡淡地评论道：“这个假想，先生，事实上能解释所有的事情，但是它却不允许作出任何预测。作为一名学者，我必须向您提供允许预测的理论著作。”

量子力学是一门研究亚原子世界的科学理论，20 世纪量子力学的发展证明了宇宙万物全部都是确定的这一观念太过于乐观了。现代物理学研究已经证实，要精确预测每一次试验的结果是不可能的，哪怕只是在大体上进行预测也是不可能的。理论只能预测不同结果的可能性。很清楚，在社会科学中情况会变得更加复杂，因为社会科学中的各种相关因素往往交织在一起，并且它们通常是很难确定的。17 世纪的研究者们很快就发现，要寻找像牛顿的万有引力定律那样精确，并且普遍适用的社会规律，从一开始就注定是不可能成功的。暂时来说，当把人类天性的复杂性引入方程式时，要想获得确切的预测，几乎是不可能的。当把整个人类的思维都纳入考察范围内时，就更加没有希望了。然而科学家们并没有气馁，一小批具有天才智慧的思想者们发展出了全新的、革命性的数学工具——统计学和概率论。

超越死亡和税捐的可能性

英国著名小说家丹尼尔·笛福（Daniel Defoe，1660—1731）因探险小说《鲁宾逊漂流记》而闻名，他还写了一本以超自然现象为题材的作品《魔鬼的政治历史》（*The Political History of the Devil*）。在这本书里，丹尼尔·笛福认为几乎在所有地方都看到了魔鬼行为的证据，他写道："如同死亡和税捐那样确定无疑的事，是完全可以相信的。"本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin，1706—1790）似乎也认同这种看法的确定性，当他在93岁高龄时，他在写给法国物理学家简巴蒂斯特·里洛伊（Jean-Baptiste Leroy）的信中说："我们的宪法正在施行，所有看起来有希望的事都会延续；但是在这个世界上没有什么可以说是确定的，当然死亡和税捐除外。"确实，我们生命的历程看起来就是不可能预测的，它容易受自然灾害影响，受我们人类错误的影响，甚至受单纯的意外和偶然影响。"由于……的发生，我们无法……"这类句子我们在日常生活中经常使用，用来表达我们在面对无法预料的事情时的无能为力，以及遇到不能控制的局面时心有余而力不足的无奈。虽然有各种各样的阻碍（或者把它们视为挑战），数学家、社会学家和生物学家从16世纪就开始了一系列尝试，试图系统地解决不确定性问题。在建立了统计力学之后，意识到了物理学的基础就是不确定性（以量子力学为表现形式），20世纪和21世纪的物理学家更加满怀激情地加入了这场战斗。研究者们使用的方法就是计算特殊结果的机率，以此来应对精确的确定性理论的缺乏。虽然不能实际预测某一个特定结果，但计算不同后果的可能性就是退取其次的好办法了。统计学和概率论就是用来提高猜测和推断准确性的工具，它们不仅为现代科学打下了坚实的基础，而且应用于从经济活动到体育竞赛等各种社会活动中。

其实我们每个人在做决定时都会使用概率和统计，只是通常都是下

意识的。例如，你也许并不知道 2004 年全美交通事故共有 42 636 起，但是我相信如果这个数字说是 300 万，你肯定早就记住了。而且了解这个数字很可能会让你在早晨进汽车前再想想自己是不是还要驾车出行。为什么那些关于道路交通事故的精确数字会在我们决定开车出行时却不能令我们自信满满？正如不久之后我们就会看到的，产生这种依赖性的一个关键因素是这些数字来源于非常庞大的数据。而在德克萨斯州的一个小镇法瑞，它的人口在 1969 年只有 49 人，这个小镇的交通事故数量很难产生同样的说服力。如果仔细研究经济学家、政治咨询顾问、遗传学家、保险公司，以及其他任何试图从海量信息和数据中得出有价值的结论的人的分析过程，可以看到概率和统计是他们手中挽开的那张弓上最关键的箭之一（达成目标最重要的工具之一）。当我们说数学已经渗透到了那些传统上不属于精确科学的领域时，这通常就是通过概率和统计打开的窗户实现的。那些已经取得丰硕成果的领域是怎么出现的？

Statistics（统计），这个词源自于意大利语 Stato（政府）和 Statista（处理政府事务的人），它最初的意思是，政府官员对事实进行简单的收集。现代意义上第一位对统计学作出重要贡献的人是约翰·格兰特（John Graunt，1620—1674）[153]，事实上他并不是一位真正的科学家。他是 17 世纪伦敦的一个小杂货店主，他的店里主要出售钮扣、针和小织物等。这份工作使他有非常多的自由时间，利用这些时间，格兰特自学了拉丁语和法语，并且开始对伦敦的《死亡率登记表》（*Bills of Mortality*）产生了兴趣，这份表格记录了伦敦每个教区每周的死亡人数，自 1604 年起在伦敦公开出版。发行这些报告的主要目的是对流行病传播造成的后果提供早期预警。利用这些第一手资料，格兰特开始了他的有趣观察，最终他出版了一本只有 85 页的小册子，名字是《在以下索引中提及的，有关死亡率登记表的自然和政治观察》（*Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index, and Made upon the Bills of Mortality*）。图

5-2展示的就是从格兰特书中摘录出的一张样表。在这张表中，格兰特按字母顺序列出了大约63种疾病和因为患各种疾病而死的人。在为皇家学会会长写的一篇献词中，格兰特指出他的工作研究的是“空气、乡村、季节、收获、健康、疾病、寿命，以及人类性别和年纪的比例”，在历史上这是一本真正的专题著作。的确，格兰特所做的可不仅仅是收集和展现数据那么简单。例如，通过仔细的检查，格兰特第一次给出了在伦敦和汉普郡乡下教区罗塞姆接受洗礼的男性婴儿和女性婴儿的平均人数，以及举行的葬礼中男性和女性的平均人数，他还首次展示了出生婴儿性别比率的稳定性。具体说，他发现了在伦敦每14个男孩出生就会有13个女孩出生，而在罗塞姆每16个男孩出生同时就会有15个女孩出生。引人瞩目的是，格兰特预言“旅行者会打听其他国家是否也是相同情况”。他同时也指出：“这对人类来说可谓一种赐福，男性多于女性，对一夫多妻制来说就是天然的障碍。在那样一个一夫多妻的国家里，女性可不能与他们的丈夫享有平等的地位，而现在，在我们这个国家里，女性与他们的丈夫地位平等。”今天我们通常认为男婴和女婴的出生比例是1.05∶1。对于多出的男婴，过去传统的解释是出于母亲自然的天性，因为根据经验，男性胎儿及婴儿同女性相比更加脆弱，也更加容易夭折，这一比例，是妈妈们提前做的一种准备工作。顺便说一句，也许受其他一些我们目前还不十分清楚的因素影响，美国和日本的男女婴孩出生比率自20世纪70年代以来一直在下降。

格兰特的另一项开创性研究是根据不同原因的人口死亡数据，对现存人口构建一种年龄分布表或“生命表”。很明显，这种表会包含丰富的政治意义，因为它从总体上为政府提供了适合服兵役的人口数量，包括16岁到56岁之间所有的男性。严格地讲，格兰特并没有给出足够的信息以推断出人口年龄分布。但是，他的工作充分说明了他的独创性思维和开拓性精神。以下就是他对当时婴儿死亡率进行的估算：

(9)

The Diſeaſes, and Caſualties this year being 1632.

Disease	Number	Disease	Number
ABortive, and Stilborn	445	Jaundies	43
Affrighted	1	Jawfaln	8
Aged	628	Impoſtume	74
Ague	43	Kil'd by ſeveral accidents	46
Apoplex, and Meagrom	17	King's Evil	38
Bit with a mad dog	1	Lethargie	2
Bleeding	3	Livergrown	87
Bloody flux, ſcowring, and flux	348	Lunatique	5
Bruſed, Iſſues, ſores, and ulcers,	28	Made away themſelves	15
Burnt, and Scalded	5	Meaſles	80
Burſt, and Rupture	9	Murthered	7
Cancer, and Woll	10	Over-laid, and ſtarved at nurſe	7
Canker	1	Palſie	25
Childbed	171	Piles	1
Chriſomes, and Infants	2268	Plague	8
Cold, and Cough	55	Planet	13
Colick, Stone, and Strangury	56	Pleuriſie, and Spleen	36
Conſumption	1797	Purples, and ſpotted Feaver	38
Convulſion	241	Quinſie	7
Cut of the Stone	5	Riſing of the Lights	98
Dead in the ſtreet, and ſtarved	6	Sciatica	1
Dropſie, and Swelling	267	Scurvey, and Itch	9
Drowned	34	Suddenly	62
Executed, and preſt to death	18	Surfet	86
Falling Sickneſs	7	Swine Pox	6
Fever	1108	Teeth	470
Fiſtula	13	Thruſh, and Sore mouth	40
Flocks, and ſmall Pox	531	Tympany	13
French Pox	12	Tiſſick	34
Gangrene	5	Vomiting	1
Gout	4	Worms	27
Grief	11		

Chriſtened { Males—4994, Females—4590, In all—9584 } Buried { Males—4932, Females—4603, In all—9535 } Whereof, of the Plague—8

Increaſed in the Burials in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year 993

Decreaſed of the Plague in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year. 266

C 7 In

图 5-2

在我们首次考察近 20 年来所有的因患病死亡和其他突发死亡的人数时，看到的总数字是 229 250 人，其中有 71 124 人死于鹅口疮、惊厥、佝偻病、牙病、寄生虫病，以及诸如流产、早产、肝肿大和以上几种疾病的综合症。这也就是说，在所有的死亡案例中，有近 1/3 的人是死于上述疾病，而对这些病例

> 进行分析时，我们偶然发现大部分是年龄不超过 5 岁的儿童。还有 12 210 例死于天花、水痘、麻疹，以及没有出现痉挛症状的寄生虫病，根据观察，这些病例的死亡人口中大约有 1/2 是不到 6 岁的儿童。现在如果把大瘟疫和非正常死亡的约 229 000 例死亡人口中的 16 000 个儿童也考虑在内的话，我们可以马上得到一个基本认识：在所有这些死亡案例中，不到 6 岁的儿童所占的比例大约为 36%。

换句话说，格兰特估算出了 6 岁以前的儿童的死亡率是 (71 124 + 6 105) ÷ (229 250 − 16 000) = 0.36。使用类似的证据和有事实根据的推测，格兰特也可以估算出老年人的死亡率。最后，格兰特通过关于年龄与死亡数之间的比例关系，进行了数学假设，填补上了 6 岁到 76 岁之间不同年龄段死亡率的空白。格兰特的许多结论在过去可谓闻所未闻，正如我们今天看到的，他的研究成果成功地开创了统计科学。他通过仔细观察过去被认为纯粹是偶然的，或者是天生注定的特定事件之间的比例关系（例如因各种疾病引起的死亡），揭示了它们之间其实是有某种极为稳定的规律可供遵循，同时也为社会科学研究引入了科学的和定量的研究方法。

格兰特之后的研究者们在很多方面都采纳了他的研究方法，并且进一步发展出了对统计的数学理解。令人吃惊的是，对格兰特的生命统计表作出最重大改进的人不是其他人，而是天文学家爱德蒙德·哈雷，也就是那位极力劝说牛顿出版《原理》的人。为什么所有的人都对生命表感兴趣？一部分原因是，并且至今仍然是，这张表是所有人寿保险的基础。人寿保险公司（以及那些真正为金钱而结婚的淘金者们）对诸如以下的这类问题都表现出极大的兴趣：如果一个人能活到 60 岁的话，那么他（她）有多大的概率能活到 80 岁？

为了构建出生命表，哈雷使用了保存在西里西亚的布雷斯劳城（波

兰西南部的一个城市）中自 12 世纪末以来所有的细节记录。布雷斯劳城的一位牧师，卡斯珀·诺伊曼医生（Dr.Casper Neumann）在他的布道中利用这些列表中的数据，来反对那些认为健康受月相的影响，或者人的生命寿数是 7 或 9 的倍数的迷信思想。最后，哈雷的论文，它可是有一个相当长的名字《人类死亡等级的估算，源自于布雷斯劳城的出生和葬礼的统计情况，估算人类死亡情况以试图确定人寿的年金》（“An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind，drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw；with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives”）[154]，成为了人寿保险的数学计算的基本依据。为了能对保险公司如何评估他们的各种保险产品有一个基本印象，让我们看看哈雷的生命表。

例如，通过这张表我们可以看出，年纪为 6 岁的人数是 710，但是能活到 55 岁的人只有 346 位。我们可以从比例 346/710 估算出，一个能活到 6 岁的人，他能活到 50 岁的是概率 0.49。同样，表中展示了 60 岁的人数是 242，而到 80 岁时，只有 41 人还健在，那么从 60 到 80 的比例是 41/242，也就是说如果一个人已经活到了 60 岁，他能继续再活 20 年的概率大约是 0.17。隐藏在这一过程背后的合理性清晰而简单。也就是说，我们可以依靠过去的经验来判断各种未来事件发生的概率。如果用来作为判断基础的事例数量足够丰富的话（哈雷表的人口基数是 34 000 人），并且如果特定的推断持续有效的话（例如死亡率是个随时间发展而持久不变的常数），那么计算出的概率可信度是极高的。以下是雅各布·伯努利对这个问题的描述[155]：

> 我要问，谁能把那些让任何年龄段的人都受其折磨的疾病所致死的死亡人数真正搞清楚（把各种可能的情况都考虑在内），并且能说明白哪些疾病比其他一些疾病更加致命，还能以这些数据为基础预测未来几代人的寿命和死亡率之间的关系？

哈雷的生命表

当前年龄	人数	当前年龄	人数	当前年龄	人数
1	1000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	634	24	573
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531
当前年龄	人数	当前年龄	人数	当前年龄	人数
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
33	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272
38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252
40	445	50	346	60	242
当前年龄	人数	当前年龄	人数	当前年龄	人数
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

伯努利得出结论，这种预言，或与之类似的预测“依赖的基础因素完全是模糊不清的，并且还有大量（数量几乎是无穷的）可变因数，这些因数之间又有交错纵横的关系，这种复杂性可能会欺骗我们的感觉，让我们得出错误的结论。”伯努利给出了一个统计/概率的方法建议：

> 然而，有另外一种方法能引导我们得出我们正在寻找的答案，并且至少使我能断定那些我们之前不能决定的未来，那就是从大量的类似事件中观察，然后从这些结果中推断。在相同的条件下，我们可以认定一件未来将要发生（或不会发生）的事件基本遵循过去类似事件发生的方式，这样通过观察过去，我们就可以推断未来。举个例子，如果与提丢斯[①]有同样年纪并且处于同一条件下的有 300 人，其中有 200 人在不到 10 岁时就夭折了，其他人还幸存着，我们可以从中合理地得出确定的结论：提丢斯在未来十年里寿终正寝的可能性是他将要至少多活十年的可能性的两倍。

哈雷在他的那篇关于死亡率的数学文章结尾之处有几段富于哲学意味的评述，其中有一段特别感人：

> 除了我先前提到的用法以外，从这张表中得出以下的推断也不是不可接受的事情。埋怨我们的生命短暂是多么不公平的啊！并且如果不能高寿，而认为自己遭受了不公正待遇，这样想也是多么不公平啊！从这张表中我们可以看出：所有出生的人中，只有一半的人能活到 17 岁，当时有 1238 人出生，但只有 616 人活到了 17 岁。与其对那种过早夭折不停抱怨，还不如

---

① Titius，提丢斯-波得定则是关于太阳系中行星轨道半径的一个简单的几何学规则，今天一般认为只是一种巧合。——译者注

怀着耐心，漫不经心地屈从于自然的消亡，这是我们人类作为易腐物质的一种必然的过程，也是我们人类精美而脆弱的身体结构和组成的必要条件：在怀着感恩之心计算着幸存人数时，应当记住在人生历程中，在生命这个竞技场上，只有一半的人能到达终点。

与哈雷悲观的统计相比，现代社会的生存条件已经有了极大改善，但不幸的是，这种改善并不是在所有国家都得已实现。例如在赞比亚，据统计该国在2006年中，出生的1000个婴儿中，就有182个儿童在5岁前不幸夭折了，同时赞比亚人口的平均寿命还不到37岁，这真让人感到心碎。

当然，统计关注的绝不仅仅是死亡。它们已经渗透到了人类生活的几乎所有方面，其涵盖领域包括物理特性分析和人类智力发育。第一位清楚认识到统计学在社会科学中产生潜在“法则”效应的人，是比利时博学家兰伯特·阿道夫·雅克·奎特莱特（Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet，1796—1874），正是他第一个引入了统计学中常用的“平均男性”的概念，也就是今天我们所说的“平均人（average person）”。

平均人

1796年2月22日，阿道夫·奎特莱特出生在比利时一个有着悠久历史的古老小城基恩特（Ghent）[156]，他的父亲是一位市政官员，在小奎特莱特7岁那年，父亲就不幸去世了。为了生计，奎特莱特在17岁时就开始教授数学。在他成为专职讲师之前，他写过诗歌和歌剧剧本，参与了两个戏剧的写作，还翻译过一部文学作品。不过，他最喜欢的还是数学，他是基恩特学院有史以来第一位科学博士。在1820年，奎特莱特被推选为布鲁塞尔的皇家科学院正式成员，并且不久之后他就成为了科学

院内最活跃的一分子。在随后的几年里，他全身心地投入教学工作中，还发表了几篇关于数学、物理和天文学研究的论文。

奎特莱特在基恩特学院开设了一门科学史的课程，在上课的同时，他对科学发展历程进行了深入的思考，并得出了一些有深刻见解的结论："科学发展到越高级的形式，它们就会越趋向于数学领域，同时数学也会越来越占据该学科所研究范围的中心位置，我们可以从该学科可能与计算结果的接近程度来大致判断这门学科真正臻于完善的程度。"

1823 年 12 月，奎特莱特被公费送去巴黎学习天文学的观测技巧。然而对当时这座世界公认的数学之都为期 3 个月的访问，却使奎特莱特完全转向了另一个研究领域——概率论。对奎特莱特启发最大，同时也点燃了他对概率论研究热情的那个人就是拉普拉斯。奎特莱特后来总结了他受拉普拉斯启发，开始重点研究概率论和统计学的这一巨大转变的过程[157]：

> 偶然，这是一个神秘、同时也是一个被滥用的词，我们常常把偶然当做一个借口来掩盖我们的无知，它成为了控制我们一般人思维中那片最抽象领地的幽灵，我们已经习惯把它们当做完全独立的事件来看待。但是在哲学家面前，偶然根本不存在，他们会综合考虑一系列表面独立的事件，敏锐的洞察力不会让他们被各种可能性所迷惑而步入歧途，如果他们能给自己足够的时间来抓住那些偶然事件的自然规律，偶然这个词就会消失不见了！

这一结论非常重要。奎特莱特在本质上否定了偶然性的作用，并且大胆地（甚至还未完全证明）用推断来代替它。奎特莱特的这个推断就是，甚至是社会现象背后也有其深刻的原因，并且统计结果所展示的有序性可以用来揭示隐藏社会秩序背后的规律。

奎特莱特想把他的统计方法应用于实践测试，于是他开始进行一项雄心勃勃的项目，该项目需要收集数千项与人体自然特征有关的测量结果。例如，通过独立测量人体特征数据，他分析了 5 738 名苏格兰士兵的胸围大小的数据分布，以及大约 100 000 名法国应征入伍者的身高数据的分布。也就是说，他用图表的方式展示了法国应征入伍者的身高情况。例如，通过他所绘制的图表，可以一眼看出身高在 5 英尺到 $5\frac{1}{6}$ 英尺之间的人数有多少，$5\frac{1}{6}$ 英尺到 $5\frac{1}{3}$ 英尺之间的人数又有多少，等等。后来他又构建了许多类似的曲线，其中有一条他称为“道德品质”分布的曲线图，这条曲线也是建立在大量的数据基础之上的。出乎奎特莱特意料的是，他还发现了所有人类的基本特征都遵循一种钟形频率分布，我们今天称为正态分布（也称为高斯分布，很明显这一名称来自于“数学王子”卡尔·弗里德里希·高斯，在某种程度上这有点不合理），如图 5-3 所示。无论是身高、体重、肢体长度的测量，还是反映人类智力特征的心理测试，类似的曲线一次又一次地重复出现。事实上，奎特莱特对这条曲线并不陌生，18 世纪中叶的数学家和物理学家就已经认识到这条曲线的存在了，而且奎特莱特在自己的天文学研究中已对此非常熟悉，只是这条曲线能与人的生理特征联系起来，这的确让人感到惊讶。在过去，这条曲线通常因为被当做*误差曲线*而为人所知，这是因为在测量任何类型的错误和误差都会表现出正态的频率分布。

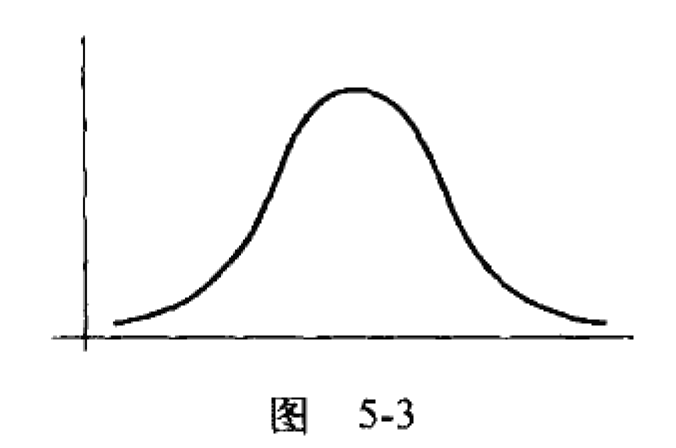


图 5-3

举例来说，假如你对精确测量一个容器中的液体温度感兴趣，你可以使用一支高精度的温度计每隔一小时测量一次这个容器中的温度。在连续测量 1 000 次后，你会发现由于随机错误以及温度可能的波动，不是所有的测量结果都一样。相反，实际测量结果将会趋向于集中在一个中心数据值附近，一些测量数值可能会高一些，而另外一些数值可能会比这个中心数值要低一些。如果你以温度测量值为对照，并把每次测量数据都绘制在图上的话，你就会得到一条钟型的曲线，这与奎特莱特根据人体生理特点绘制的曲线基本类似。事实上，在任何物理定量分析中，测量的数值越多，所得到的频率分布就越接近正态分布。对于数学“无理由的有效性”，这一事实的直接含义本身就是十分富有戏剧性的——就连人类所犯的错误都要遵循严格的数学规律。

奎特莱特认为这些结论的影响是深远的。他把他所发现的人类生理特征遵循误差曲线这一结论当做是自然界试图产生某种“平均人”的事实证据[158]。根据奎特莱特的观点，正如多次测量一根针的长度时，测量的误差会形成一条分布曲线，这个分布是围绕平均（真实）长度形成的，同样，自然的误差也会分布在某种生物周围。他声称一个民族的所有人也集中于该民族的那个“平均人”周围，就好像“其他人都是对这个（平均人）的测量的结果，但是由于使用的工具过于粗陋，以致于很难准确测量这种变化。”

很显然，奎特莱特的这个推断太过于偏激了。尽管奎特莱特所发现的人类的生物性特征（无论是生理上的还是精神上的）的确呈现出正态频率曲线分布，这一结论本身是极其重要的，但是我们既不能把它当做是自然意旨的证据，也不能把个体的变异仅仅当做是错误来对待。例如，奎特莱特发现法国应征入伍士兵的平均身高是 $5\frac{1}{3}$ 英尺，但是，在个头较低的那一批，他发现了有一个人只有 $1\frac{5}{12}$ 英尺，显然，在为一个身高为 $5\frac{1}{3}$ 英尺

的人测量身高时，任何人在测量中都不能出现几乎多达 4 英尺的误差。

按奎特莱特的“法则”观念，人类都是按一个模子塑造成形的，即使我们忽略了这一观念，从另外一个方面来看，人类无论是身高、体重还是智商值等特征，都遵循正态曲线分布，这一事实本身就值得高度关注。如果这还不够的话，甚至美国棒球联合总会在棒球比赛中的击球率也呈现出一种理性的正态分布，还有股票指数（它由许多单独的股票组成）的平均回报率同样也是正态分布。不仅如此，如果出现了偏离正态曲线的分布也需要引起重视，并对其进行仔细检查。举个例子来说，在英国如果有一所学院学生的成绩被发现不是正态分布的，这会马上引起有关方面的注意，相关机构会对该校学生成绩的打分情况展开专项调查。当然，这并不是说所有的分布都必然是正态的。莎士比亚在他的戏剧中所使用的单词的长度就不是正态分布的。与由 11 个字母或 12 个字母组成的长单词相比，莎士比亚更偏爱于使用仅有 3 个或 4 个字母构成的短单词。美国家庭的平均收入也不是一条正态曲线，据统计，在 2006 年全美 6.37%的家庭收入大约占据所有家庭收入之和的 1/3。这一事实本身引发了另一个有趣的问题：如果人类体力和智力特征都是呈正态分布的（这些特征大致决定了一个人的收入情况），那么为什么人类的个人收入不是正态分布呢？回答这样的社会经济学问题远远超出了本书的讨论范围。然而，从目前有限的观察出发，一个给人留下深刻印象的事实是，基本上人类所有的、可测量的特征，或者（任何品种）动物和植物的特点，其形态分布全部都符合某种类型的数学函数。

人类生理特征在历史上不仅是研究频率分布的基础，也为建立数学中相关的概念铺平了道路。相关的概念度量了可变因素之间的变化程度，即一个变量值变化时引起的另一个变量变化的程度。例如一位身材较高的女士穿的鞋的尺码通常也要更大一些，同样，心理学家发现了父母的智力与他们的孩子在学校的成功程度之间具有某种相关性。

相关的概念在两个可变因素之间没有精确的函数依赖关系时会特别有用。举例来说，有一个可变因素是亚里桑那州南部地区日间的气温，而另一个可变因素是在这一地域发生火灾的次数。当给定一个气温值时，由于火灾还与其他可变因素有关，比如天气的湿度和人为在林区生火等，所以没有人能精确预测可能发生火灾的数量。换句话说，对于任何确定的温度值，都可能对应多个起火的数字，并且反之亦然。尽管如此，数学中相关系数的概念可以定量分析诸如气温值和火灾数量这两类可变因素之间依赖关系的紧密程度。

第一位引入相关系数这一工具的人是维多利亚女王时代的地理学家、气象学家、人类学家和统计学家弗朗西斯·高尔顿爵士（Francis Galton，1822—1911）[159]。顺便说一句，高尔顿是查尔斯·达尔文的表兄弟。高尔顿并不是一位专业研究数学的学者，作为一个极为重视实践工作能力的人，他常常把他富有创见性的数学思想和其他数学家交流，特别是统计学家卡尔·皮尔森（Karl Pearson，1857—1936），这里就是高尔顿提出的对相关概念的解释：

> 肘尺的长度（一种古代的长度计量单位，以前臂长度为基准，大约有 18 英寸长）与人的身高有关，一个较长的肘尺通常总是对应着一个个头较高的人。这两者之间的关系非常紧密，一个非常长的肘尺总是对应着一个高个子。但是如果这两者之间的关系不是很紧密，一个非常长的肘尺，按平均数计算，可能只与一个相对较高的人有关，而不是与一个非常高的身材相关。然而，如果这种关系是"零"的话，一个非常长的肘尺可能就与某特定身材无关，并且一般来说只与普通人的身材相关联。

皮尔森最终给出了相关系数精确的数学定义。该系数是以如下方式定义的：当相关性非常高时，也就是说当一个可变因素与另一个可变因

素的变化紧密相连时，我们定义相关系数的值为 1；当两个可变因素反相关时，则意味着其中一个变量值变大时，另一个可变因素的值会减小，并且反过来的话也是这样，此时相关系数的值则等于-1；如果一个可变因素变化时，与另外一个可变因素毫无关系，就好像一个变化发生时另外一个可变因素根本不存在，此时的相关系数值为 0（例如，一些政府行为，与民众相信政府能代表他们利益的这种期望，很不幸，两者之间几乎就是 0 相关的）。

现代医学研究和经济预测都完全依赖于对相关系数的确定和计算。例如吸烟和患肺癌之间的关系，在阳光下曝晒与患皮肤癌之间的关系，通过观察和计算，这些关系都已经被初步确定为是相关的。股票市场分析员一直在努力找出，并试图定量计算市场行为与其他可变因素之间的相关性，因为任何这样的发现都意味着巨额的财富。

早期的一些统计学家已经清楚地认识到，收集和解释统计数据都十分棘手，在处理它们时要极其小心。一位渔民如果使用的渔网网眼直径是 10 英寸的，我们可以十分简单地得出他所捕到的鱼都是长于 10 英寸的，原因很明显，凡是短于 10 英寸的鱼都会从渔网中逃脱出去，这是所谓的选择效应的一个典型案例。如果说结论有偏见的话，通常主要在两个地方有问题：要么是在收集数据时所使用的工具不正确，要么是分析数据时所采用的方法不对。例如现代社会中的民意调查通常访问的人数不会超过一千人。那么实施民意调查的人如何能确定这些受访者所表达的观点能正确代表数百万人的意见？另外一个需要注意的问题是相关性并不是必然包含的原因，烤面包机的销量上升的同时，欣赏古典音乐会的观众人数也增加了，但是这并不意味着家里出现烤面包机会增强这个家族对音乐的鉴赏力。相反，这两种（上升）效果也许是因为经济环境改善造成的。

虽然有这些重要的因素需要注意，统计学已经成为了研究现代社会

最强有力的工具之一，不夸张地说，它把“科学”引入到了社会学各学科之中。那么，统计学为什么这么重要？答案来自于数学中的概率论，这一理论统治了现代生活的诸多方面。工程师设法判断在宇航员探险车上应当安装哪种安全机械装置，专业的物理学家分析加速器试验的结果，心理学家在 IQ 测试中评定孩子的智力发育情况，制药公司评估他们生产的新药的疗效，以及遗传学家研究人类遗传现象，所有这些都会用到数学上的概率论。

靠碰运气取胜的游戏

对概率的一系列研究[160]，起源是非常普通的——赌徒们试图调整他们的赌注以增加他们赢的几率。特别是在 17 世纪中期，有一位名叫雪佛莱·德·米尔（Chevalier de Méré）的法国贵族，他是一位有名的赌徒，他向当时法国著名的数学家和哲学家布莱斯·帕斯卡（Blaise Pascal，1623—1662）提出了一系列关于赌博的问题。帕斯卡在 1654 年与当时另外一位著名的法国数学家皮埃尔·费马（Pierre de Fermat，1601—1665）之间频繁通信，在这些信中他们就类似问题进行了深入的交流，概率论的基本理论事实上已经建立起来了。

让我们看看帕斯卡在 1654 年 7 月 29 日写给费马的一封信中讨论的一个有趣的问题[161]。这个问题中假设了有两位贵族，他们在玩一种赌博游戏，游戏的工具是一只骰子，在游戏开始之前每个人都在桌子上放下了 32 枚金币作为赌资。第一个人选择的是数字 1，而另一个选择的是数字 5。如果掷出的骰子向上的一面出现了某一位玩家选中的数字，那么这名玩家就会获得一个点，第一位获得 3 个点的玩家获胜。假如游戏进行一段时间之后，数字 1 出现了两次（也就是说选择 1 的那一方获得了两个点），而数字 5 只出现了一次（[illegible]获得了一个点），此时出于某种原因，游戏在这一刻被迫中[illegible]上的 64 枚金币应

当如何分配呢？帕斯卡和费马给出了数学上的逻辑答案。如果游戏继续的话，若那位已经有两个点的玩家在下一次掷骰子时赢了，那么全部的 64 枚金币就都属于他了；如果选择 5 的玩家在下一次掷骰子中赢了，那么他们就可以平均分配这 64 枚金币，每个人都得到 32 枚。如果这两方都不再掷骰子，第一位玩家可能会争辩道："即使我在下一次掷骰子时输了，我也会得到 32 枚金币，而对于余下的 32 枚金币，我有可能得到，你也有可能得到，机会是均等的。因此，应当把这 64 枚金币中的无论如何我也会得到的 32 枚先给我，然后平均分配剩下的 32 枚金币。"换句话说，第一位玩家应当得到 48 枚金币，而另一位只能得到 16 枚。难以置信，不是吗？这门全新的、反映出深刻思想的数学分支，就是诞生于这类十分浅显、甚至有点微不足道的讨论之中！然而，这也正是数学有效性是"无理由的"，并且保持神秘的原因所在。

概率论的本质[162]可以从以下这些简单的事实中看清楚。没有人能确定地预测出一枚抛向空中的硬币落地时哪一面会向上。即使是连续抛 10 次同一枚硬币，每次都是头像向上，也丝毫不能提高我们对第 11 次抛出的硬币是哪一面朝上的预测能力[163]。但是，如果我们抛这枚硬币的次数达到一千万，我们就可以精确地预测出头像的一面向上次数非常接近一半，并且有字的一面向上的次数也非常接近一半。事实上，在 19 世纪末，统计学家卡尔·皮尔森非常有耐心地连续抛了一枚硬币 24 000 次。根据他的记录，他抛出头像的次数是 12 012 次。在某种程度上，这就是概率论涉及的一切。概率论为我们提供了试验次数非常多的结果的精确信息，但是它不能预测任何特定的试验结果。如果一个试验有 n 种可能的结果，这几种可能结果发生的概率都是相同的，那么任何一个结果发生的概率就是 $1/n$。比如你掷一个骰子，那么出现数字 4 的概率是 1/6，这是因为一个骰子有 6 个面，而抛出任何一面的概率都是相同的。设想一下，你连续掷 7 次骰子，每一次都得到 4，那么下一次你得到 4 的概率有多大？

概率论给出了一个极其清楚的答案：仍然是 1/6。这是因为骰子没有记忆，任何“幸运之手”的说法或下一次抛骰子会补偿先前抛掷过程中不平衡（骰子各个面出现的不同次数）的观念都是神话传说。事实的真相是如果你掷了 100 万次骰子，那么结果会平均分布，并且出现 4 的机率会非常接近 1/6。

让我们再来看一个稍微复杂一点的例子。假设你一次同时抛 3 枚硬币，那么你一个头像向上、另外两个字面向上的概率是多大？通过简单地列举出所有可能的结果，就能轻易地得到答案。如果我们把头像向上的一面定义为“H”，有字的一面定义为“T”，这样的话就会有 8 种可能的结果：TTT、TTH、THT、THH、HTT、HTH、HHT、HHH。对照这 8 种结果，你可以发现有 3 种与“一个头像、两个字面”的要求相符。因此，对于这一事件，它发生的概率是 3/8。在更一般的情况下，如果有 n 种可能的基本结果，并且出现每种结果的机会都是均等的，m 是你所感兴趣的事件数量，那么这一事件发生的概率就是 m/n。请注意，这就意味着概率总是 1 和 0 之间的某个值。如果你所感兴趣的事件事实上不可能发生，那么 $m=0$（表示没有你所喜欢的结果），并且此时的概率值也是 0。在另一方面，如果该事件的发生是绝对确定的，也就是说所有的 n 种事件都是肯定的（$m=n$），此时概率就是 $n/n=1$。抛 3 枚硬币这个试验的结果还证实了概率论中另外一个重要的结论：如果有多个事件，它们之间彼此是完全独立的，那么这些事件发生的概率是个体概率的产物。还是以同时抛 3 枚硬币为例，获得 3 个头像的概率是 1/8，其计算过程是这样的：因为抛一枚硬币得到头像的概率是 1/2，而抛 3 枚硬币时每枚硬币落地所得到的结果之间都是互相独立的，所以 $1/2\times1/2\times1/2=1/8$。

你也许会继续思考，除了在赌场或者在其他赌博活动中得到应用之外，这些基础的概率论概念还有什么其他用途吗？也许你无法想象，那些表面上看起来并不是十分重要的定律是现代遗传学（这是一门研究生

物遗传特征的科学）的核心基础理论。

把概率论引入遗传学的是一位摩拉维亚牧师格莱格·孟德尔（Gregor Mendel，1824—1884）[164]。孟德尔的家乡在一个小山谷中，这里紧邻摩拉维亚和西里西亚的边境线（位于今天的捷克共和国）。孟德尔早年加入了位于布尔诺的圣托玛斯奥古斯汀修道院，之后他在维也纳大学学习动物学、植物学、物理学和化学。当他学成返回布尔诺，在奥古斯汀修道院院长的大力支持下，他用豌豆植株做试验开始了他的遗传学研究。孟德尔使用豌豆作为试验材料的主要原因是，这种植物的生长十分迅速，并且雌雄同体，这样，豌豆植株不仅能自花传粉，也能在其他植株间进行异花传粉。孟德尔让只结绿色种子的的豌豆植株与只结黄色种子的豌豆植株两者之间异花传粉。在之后的观察中他得出了一些结果，但这些结果却让他感到十分困惑，如图 5-4 所示。从图中可以看出，杂交后的第一代豌豆植株只产生黄色种子，然而随后的第二代中，黄色种子和绿色种子的比例却是 3:1！从这些令人震惊的发现中，孟德尔总结出了 3 个基本规律，而这也成为了遗传学发展过程中最重要的里程碑。

(1) 生物某一特征的遗传涉及其亲本传给后代的某种特定的遗传“因子”（也就是今天我们所熟知的基因）。

(2) 所有后代都会从每个亲本那里（也许来自父本，也许来自母本）继承一项这样的“因子”（对于任何给定的特征）。

(3) 一种给定的特征也许并不能在第二代中体现，但是却能传到第三代中。

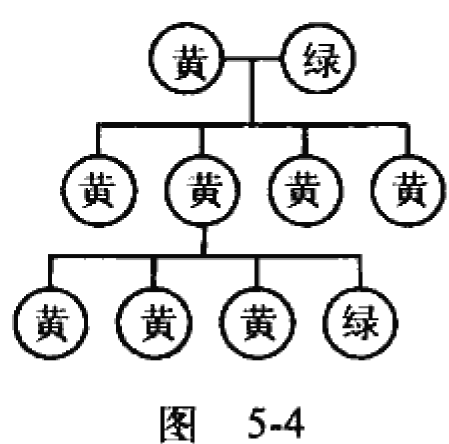


图 5-4

如何解释孟德尔试验中的那种数量关系？孟德尔认为每一个亲本植株都一定有两个完全相同的“遗传因子”（即等位基因），这种等位基因要么是一对黄，要么是一对绿（如图 5-5 所示）。当两株植物交配时，每一个后代都要从其父本、母本那里各继承一段不同的等位基因（根据前述的规律（2））。这也就是说，豌豆植株的每一个后代的种子都包含绿色的等位基因和黄色的等位基因。那么为什么第二代的豌豆植株种子全部都是黄色的？孟德尔的解释是，这是因为对豌豆植株而言，黄色是占优势的颜色（显性性状），所以它把整个这一代中绿色等位基因的显现给掩盖掉了（根据前述的规律(3)）。然而（依然是根据规则(3)），占据优势的黄色并不能阻止隐性的绿色基因被遗传到下一代中。在下一轮的交配中，用包含黄色等位基因和绿色等位基因的植株与另一株同样包含这两等位基因的豌豆植株进行异花传粉。由于其后代分别从父本和母本那里各得到一段等位基因，因此它们种子颜色将会呈现出图 5-5 所示的组合：绿-绿、绿-黄、黄-绿、黄-黄。由于黄色是占据优势的性状（显性性状），所以所有包含黄色等位基因的种子全部都会是黄色。同时，由于等位基本组合的几率是相同的，因此黄色种子的豌豆植株与绿色豌豆植株的比例是 3:1。

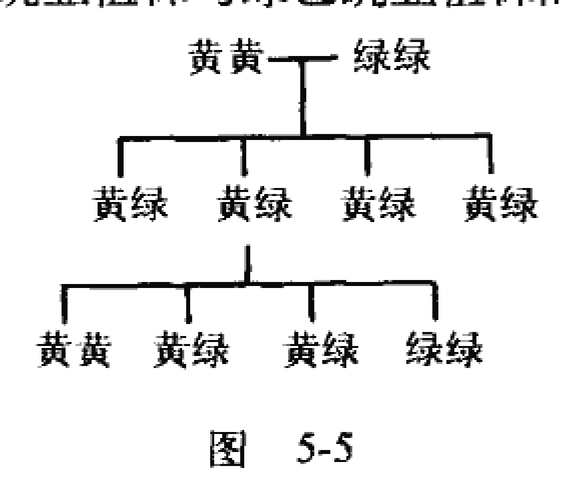


图　5-5

你也许已经意识到了，孟德尔的整个试验，从本质上讲与抛硬币是相同的。如果把硬币的头像面看做绿色的豌豆，把硬币有字的一面看做黄色的豌豆，要想问豌豆呈现黄色的概率有多大（这里把黄色作为显性性状，字面作为显性性状），事实上与询问在抛两枚硬币时至少得到一个

字面朝上的概率有多大完全是相同的。很明显，答案是 3/4，因为在 4 种可能的结果里（字面-头像、字面-字面、头像-字面、头像-头像）出现字的次数是 3 次。这也就意味着（在一段很长时间的实验后）在抛硬币时至少出现一个字面向上的数量与完全不出现字面的数量比率是 3:1，这和孟德尔在试验中反映的结果完全一致！

尽管孟德尔在 1865 年公开发表了他的论文《植物杂交试验》[165]，并且在两次科学会议上宣讲了他的试验结果，但他的研究成果没有引起人们重视。直到进入 20 世纪后，孟德尔的试验才引起了人们的高度关注。虽然人们对孟德尔试验结论的精确性还有一些疑问[166]，但孟德尔还是被当做历史上第一位奠定现代遗传学数学基础的人。沿着孟德尔指明的道路，著名的英国统计学家罗纳德·艾尔默·费雪尔（Ronald Aylmer Fisher，1890—1962）建立了群体遗传学，这一数学分支确定了人群的基因分布模型并计算了基因随时间变化的频率[167]。今天，遗传学家们可以利用 DNA 组合中的统计采样来预测未出生后代可能的生理特征。但问题仍然存在：统计学和概率论究竟是怎样精确相关的？

事实和预测

试图破译宇宙演变奥秘的科学家通常会尝试着同时从两个方向入手来解决问题。有些人从最初的宇宙中最微小的宇宙结构变化开始，有些研究当下这个宇宙状态的所有细节。前者在研究宇宙演变过程中使用大型计算机来模拟这一进程，而后者采用了一种侦探式的工作方式，力图从现在宇宙状态的大量事实中推演出宇宙的过去。概率论和统计学的关系与这种研究十分类似：在概率论中初始状态和可变因素是已知的，其目标是预测最可能出现的结果；而在统计学中，结果是已知的，但是原因都是不确定的。

让我们分析一个简单的例子来看看这两门学科是如何互相补充、相

辅相成的，也可以说是怎样中途相遇的。我们已经知道了，统计学研究表明，大量的物理定量测量，甚至是许多人类生理特征都是按正态频率曲线的方式分布的。更准确地说，正态曲线并不只是一根曲线，它实际上是一簇曲线，所有这类曲线都可以用通用数学公式来描述，并且它们的外形特点仅仅通过两个参量就能完全刻画出来。第一个量是均值，也就是分布的平均值，以这个值为中心正态分布的曲线左右对称。均值的实际大小，当然还取决于所测量变量的种类（例如身高、体重、智商等）。甚至对同一变量而言，针对不同人群，均值也可能不同。举个例子的话，瑞典男人的平均身高可能与秘鲁男人的平均身高有差异。第二个定义了正态曲线的量为标准方差。标准方差描述了数据在平均值周围的聚焦程度。在图 5-6 中，与其他两条曲线相比，可以看出曲线 a 的测量值是最分散的，也就意味着曲线 a 的标准方差最大。均值和标准方差这两个量引出了一个非常有趣的事实，那就是无论均值和标准方差的具体数值是多少，68.2%的数据都落在了以平均值为中心，以标准方差的数值为两侧边界的区间内。如果进行精确研究的话，若一个特定人群（人口数量足够大）的智商均值为 100，标准方差值为 15，那么 68.2%的人的智商将会在 85 和 115 之间。更进一步的研究表明，对于所有的正态分布曲线，95.4%的数据落在以均值为中心，以 2 倍标准方差数值为边界的区间内，99.7%的数据落在以 3 倍标准方差数值为边界的区间内。还是用我们刚才提过的那个案例来分析，95.4%的人的智商值在 70 和 130 之间，而 99.7%的人的智商值在 55 和 145 之间。

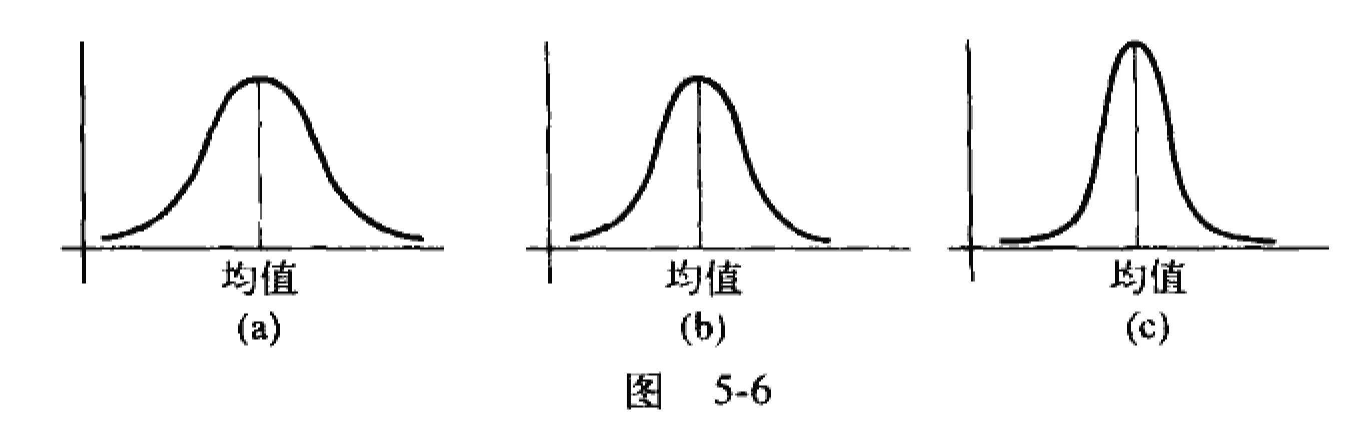


图 5-6

假设我们想预测一个从人群中随机挑选出的人的智商在85到100之间的概率有多大。图5-7告诉我们概率为0.341（34.1%），因为从概率论的定律我们知道，概率不过是想要的结果除以所有可能结果数量的商。如果我们还对从人群中随机挑选的一个人的智商高于130的概率有多大感兴趣，只看一眼图5-7就能说出答案，这种情况的概率仅有0.022(2.22%)。与此非常相似，通过利用正态分布的属性和积分这样的工具（积分用来计算曲线的面积），我们能计算任何给定范围的智商概率。也就是说，概率论和它的合作伙伴统计学，联合起来为我们提供了答案。

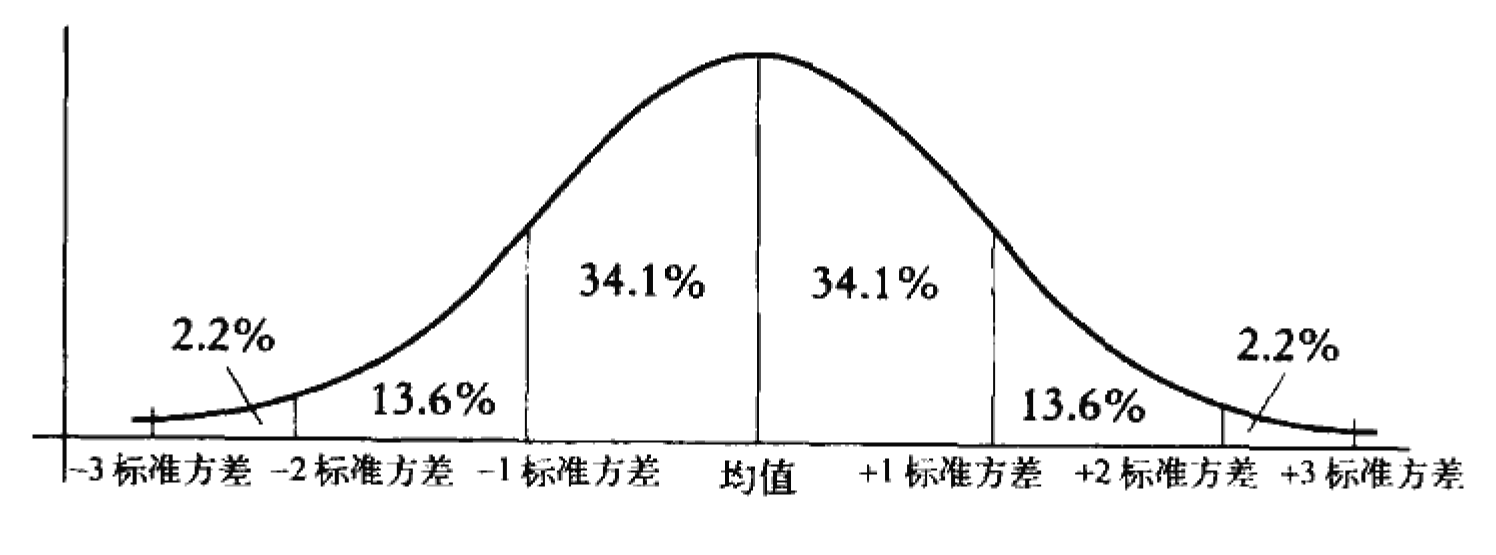
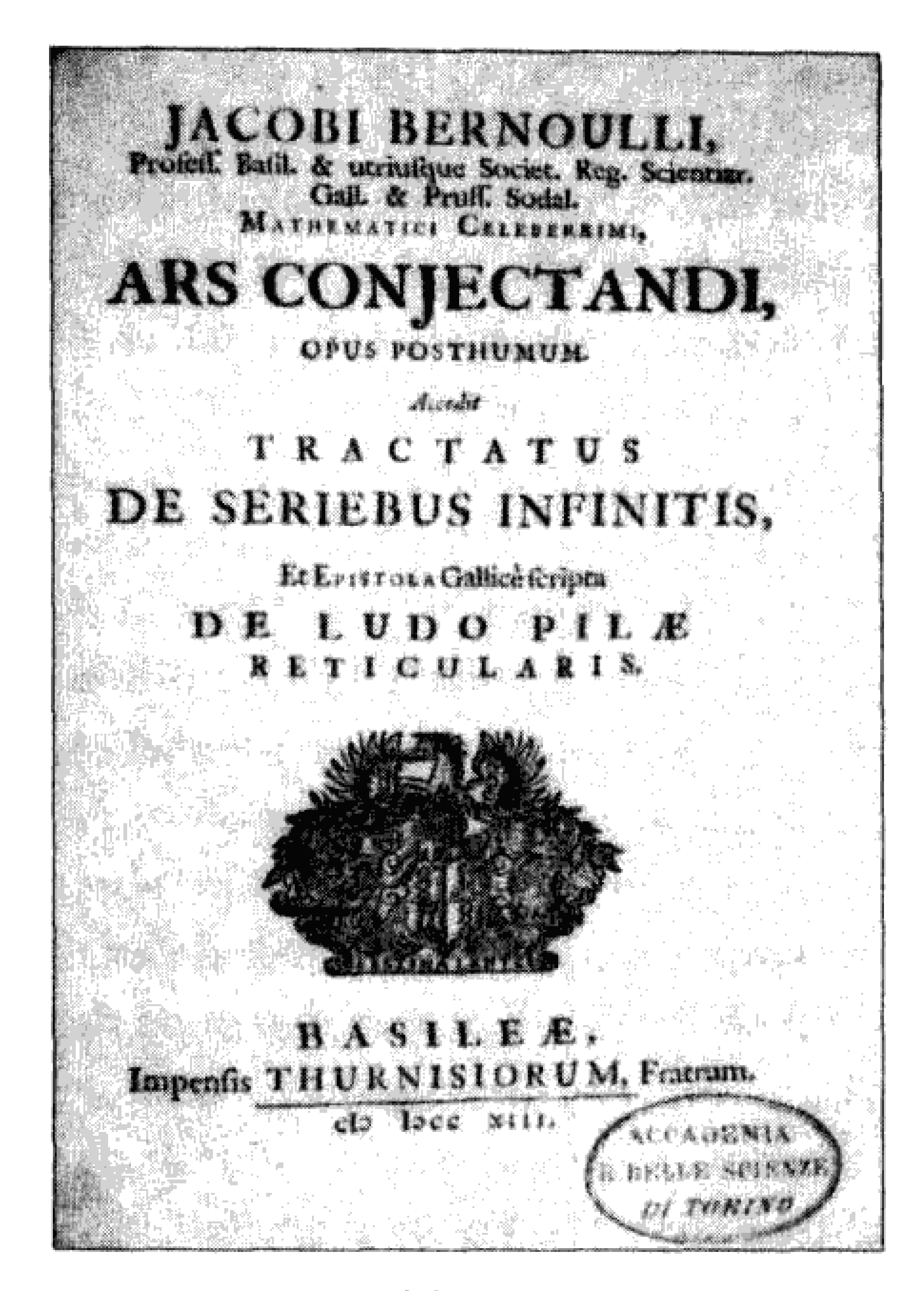


图 5-7

我在前面已经多次指出，概率论和统计学在处理大样本事件时才会有意义，它们从来不是用来解决个体问题的。这一基本认识，也就是著名的大数定理，雅各布·伯努利在他所著的《推测的艺术》（*The Art of Conjecturing*）一书中进行了系统的阐述（图5-8展示的是这本书在首版时的封面）[168]。简而言之，大数定理表明，如果某一事件发生的概率是*P*，那么对于所有试验，*P*是事件发生最有可能的比例，而且如果试验次数接近无穷的话，事件发生的比例成为*P*是确定无疑的。伯努利在他的《推测的艺术》一书中这样介绍大数定理："还需要进一步研究的是，增加观察次数是否能让有利事件与不利事件的比例更接近真实的比例。"伯努利随后使用了一个特别的例子解释了这一概念[169]：


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

图　5-8

假设我们有一个罐子，里面有 3 000 块白色的鹅卵石和 2 000 块黑色的鹅卵石。假如我们事先并不知道这个罐子里究竟有多少块鹅卵石是黑色的，有多少块是白色的，而我们又想通过试验来得出罐子里黑色与白色鹅卵石的比例，应当怎么做呢？我们可以从罐子里一个接一个地取鹅卵石，并把每次取出的石头颜色记录下来，最后看看到底有多少次取出了黑色的鹅卵石，有多少次取出了白色的鹅卵石（在这里我要提醒你的重要一点是，在取石头的过程中，当你取出一块鹅卵石，记录下颜色后就应当把它放回到罐子里，然后再继续取，再放回去，这样罐

子中的鹅卵石数量就总是保持着一个常数)。现在我们要问，如果允许你无限地取下去，例如试验的次数为 101 001 000 次，同时试验的时间也是无限的（并且最终达到“实际上的确定”），取出白色鹅卵石与取出黑色鹅卵石的比例数值是否与罐子中石头实际的比例相同呢？或者是另外一个不同的数值？如果答案是不相同的话，那么我承认，要通过观察来确定每种情况发生的次数，这可能是失败的（例如罐子中黑色鹅卵石与白色鹅卵石的数量）。但是如果我们的确能用这种方法最终实现实际上的确定[①]……那么我们就能非常精确地断定一种后验情况发生的次数，就好像这是我们已知的一种先验情况。

雅各布·伯努利花了 20 年的时间来完善这一理论，而它也的确成为了统计学的支柱理论之一。他认为甚至那些表面看起来只是碰运气的事情，事实上也存在支配性的法则，并最终以这种信仰作为他著作的结束语：

如果我们持续不断地观察从现在直到永远发生的所有事情（因此概率可能最终是确定的），我们可以发现世界上所有的事情都有其必然的原因，并且绝对遵循某些确定的法则。所以说我们是被强制地认为存在某种确定的自然规律，甚至是对那些看起来十分偶然的事件，也似乎是命中注定的。我知道这是柏拉图在关于宇宙循环学说中曾经提及过的，他认为在经历了无穷尽的时间之后，所有的事物都将会回到它们本源的状态。

关于不确定性科学的故事结局十分简单：数学在某些方面甚至可以应用在那些我们生活中不太“科学”的领域中，包括那些表面看起来完全是由运气支配的领域。因此，在试图解释数学“无理由的有效性”时，

①雅各布·伯努利在《推测的艺术》随后一章中证实了这种情况。

我们不能把我们注意力仅仅限制在物理学领域中，我们可能最终不得不以某种方式弄明白究竟是什么原因导致数学无处不在。

数学那令人难以置信的力量在著名的剧作家和散文作家乔治·萧伯纳（George Bernard Shaw）那里也没有失去效力。萧伯纳绝对不是因为他的数学才能而闻名的，但是他曾经写过一篇关于统计学和概率论的文章，这篇观点极为深刻的文章题目为《赌博的邪恶和保险的美德》（The Vice of Gambling and the Virtue of Insurance）[170]。在这篇文章里，萧伯纳承认对他来说保险是“建立在那些无法解释的事实，以及只有专业的数学家才能计算的冒险基础之上的”。然而紧接着，他又写下了下面这段含义十分丰富的文字：

> 试想有一场商业谈判，一方是一位希望做国际贸易的商人，但他极度恐惧会遭遇海难事故或被野蛮人给吃了；另一方是一位船长，他希望有大量的货物和乘客。船长回答商人，他的货物会十分安全，并且如果他随船出海的话，他本人也同样安全。但是这位商人满脑子都是约拿①、圣保罗·奥德休斯和罗宾逊·克鲁索，不敢去冒险。他们之间的交流将可能会是下面这样。
>
> **船长**：放心！我保证如果你乘坐我的船出海，明年的今天你还会好好地坐在这里。我可以和你打赌，赌注多少都行。
>
> **商人**：但是如果我和你打赌，我赌我在这一年里会死。
>
> **船长**：你肯定会输的，你为什么不赌你会活下来？
>
> **商人**：但是如果我被淹死了，同时你也被淹死了，那我们

---

① 《圣经》中的一位希伯来先知，上帝要求他去尼尼微传教，他没有照办，并试图从海上逃跑，在暴风雨中他被看做是厄运的罪魁祸首，因此被扔出船外，被一条大鱼吞噬后，侥幸逃出升天，并完成了使命。——译者注

的赌注是什么？

船长：这样的话，我会为你找一个没有出海的人，他将会和你的妻子及家人打赌。

商人：当然这改变了游戏规则，但是我的货物会怎么样？

船长：呸！这个赌也可以包括货物。或者我们打两个赌：一个是赌你的生命，另一个是赌你的货物。我向你保证，这两样都会很安全，什么意外都不会发生，并且你会看到海外所有的瑰丽风光和奇观异景。

商人：但是如果我和我的货物全部都安全的话，我还得额外再为我的生命和货物安全付给你一大笔钱。如果我没有被淹死，我也会破产的。

船长：这的确是事实。对我来说这笔钱并不像你想象的那么重要。如果你被淹死了，我可能是第一个被淹死的人，因为如果船沉了，我肯定是最后一个离开船而获救的人。然而，我还是劝你去冒这个险。这样吧，我和你赌 10 倍的赌注，这能让你动心吗？

商人：嗯，这样的话……

这位船长已经认识到了保险的概念，正如金匠发现了银行一样，对某些人来讲，诸如萧伯纳，他们抱怨在他们所接受的整个教育中，“从来没有一个人就数学的意义或效用对我们提过哪怕一个字”，这段幽默的文字生动地描述了关于保险的数学“历史”值得关注，它很能说明问题。

除了萧伯纳的文章外，到目前为止，我们已经或多或少地透过数学家的眼睛，看到了数学的某些分支的发展。对于我们每个人，以及许多理性主义的哲学家，例如斯宾诺莎和柏拉图主义者们，这是很浅显的事实。毫无疑问，数学真理存在于它们自己的世界，并且人类思维仅仅通

过推理的力量就能接近这些真理而不用观察任何现象。爱尔兰哲学家、克罗因（Cloyne）的主教乔治·贝克莱尔（Geroge Berkeley，1685—1753），第一个揭示了人类把欧几里得几何学作为普遍存在真理集合的这种观点，与数学的其他分支之间存在着某种潜在的差距。在他的《分析者》（又名《写给一位异教徒数学家的论文》）（*The Analyst；Or a Discourse Addressed to An Infidel Mathematician*）著作中（这里所说的异教徒一般被认为是爱德蒙德·哈雷）[171]，贝克莱尔从根本上批评了牛顿（在《原理》中）和莱布尼茨引入的微积分和解析法。贝克莱尔还证明了牛顿关于“流数”的概念（变化的瞬时速度）没有经过严格的定义，在贝克莱尔的眼中这足以让人们对其整个学科产生怀疑。

> 流数方法是一把通用的钥匙，它帮助现代数学家解开几何的奥秘，进而解开自然界的奥秘……但是这一方法是清晰的还是晦涩的，是始终如一的还是前后矛盾的，是结论性的或是证据不足的，如果说我的态度还不够公允的话，那么我把我的疑问交给最公正的读者们来判断。

贝克莱尔的确认识到了这个问题，事实上关于解析的一致性理论直到 20 世纪 60 年代才真正形成。但是数学家在 19 世纪却经历了一场非常具有戏剧性的大转折。

第 6 章

几何学家：未来的冲击

作家阿尔文·托夫勒（Alvin Toffler）在他著名的作品《未来的冲击》（*Future Shock*）[172]中这样定义他的书名："我们个人在极短的时间内因遭受剧烈的变化，而经受的粉碎性压力和迷茫。"在 19 世纪，数学家、科学家和哲学家们的确经历了这样的震撼。事实上，近一千年以来认为数学提供了永恒的、不变的真理的信仰被打碎了。这一出乎意料的思维上巨大的动荡，是由一门全新的几何分支的出现而引发的，这门学科在今天称为非欧几何。如果你不是非常专业的人员，可能都没有听说过非欧几何，但是，在科学研究领域，这门全新数学分支的革命性的重大意义被认为足以和达尔文所开创的进化论相提并论了。

为了充分理解这一数学分支对人类世界观带来的巨大冲击和深刻影响，我们有必要先来简要回顾一下它的数学历史背景。

欧几里得"真理"

19 世纪之前，如果说有一门学科知识一直被当做真理和确定性知识的完美典范的话，那它就是欧几里得几何学，也就是我们在中学里都学过的传统经典几何学。著名的荷兰籍犹太人哲学家巴鲁克·斯宾诺莎（Baruch Spinoza，1632—1677）就把他那极为大胆的、试图把科学、宗教、伦理和推理统一起来的研究结论命名为"用几何方法证明的伦理学"（他的著作名称）。更有甚者，虽然唯心主义和柏拉图主义者所提出的以

数学形式存在的世界和物理现实之间有明显区别，但是大多数科学家仍然把欧几里得几何学中的对象，当做是从真实的物理世界的对应物中提炼、抽象出的存在形式。即使是最忠实的经验主义者，例如大卫·休谟（David Hume，1711—1776）——他坚持认为科学的基础远没有人们所想象的那么肯定，也认为欧几里得几何学就像直布罗托海峡的岩石那么坚固。在休谟所著的《人类理解力研究》（*An Enquiry Concerning Human Understanding*）一书中，他提出有两种类型的“真理”[173]：

> 人类推理和研究的所有对象可以分为两类：一类是理论关系，另一类是事实真相。第一类真理要么是人类的某种直观断言，要么就是经过论证后的确定结论……并且其中有一部分仅仅是通过人类思维的推导发现的，它们完全不依赖宇宙中存在的任何客观现实。尽管在自然界中从来不存在圆形或三角形，但是由欧几里得证明的真理却永远表现出它们的确定性和存在迹象。第二类事实真理不是用上面提到的方式发现的，不论这些真理本身有多么伟大，证明它们真实性的证据在本质上不同于上述真理。每个事实真理的反对命题仍然有可能是成立的，因为这类真理无法暗示否认。太阳明天不会升起，这个命题绝对不会让你觉得看不懂，它对自己否认（即太阳会升起）的暗示也绝对不会多于对自己肯定的暗示。我们试图去证明这个命题是错误的努力，是徒劳的。

换句话说，尽管休谟和其他所有的经验主义者一样，认为人类的全部知识来源于观察，但是几何学以及这门几何学所反映的“真理”就拥有这样的特权地位。

伟大的德国哲学家伊曼纽尔·康德（Immanuel Kant，1724—1804）并不是完全赞同休谟的观点，但是他却同意休谟对欧几里得几何学的看

法，他同样认为欧几里得几何是绝对确定的真理，并且其正确性是确信无疑的。康德在他的不朽名著《纯理性批判》（*Critique of Pure Reason*）中，试图推翻人类思维和物理现实之间的联系。康德认为人类思维“构建”或“处理”宇宙事物和规律时具有某种主动性，他不认为是物理现实的印象被完全印到被动的思维中。随着思考不断深入，康德不再关注什么是我们能知道的，而是关注怎样知道我们能知道的[174]。他解释说当我们的眼睛寻找光的微粒时，这并不能帮助我们在意识中形成光的影像，但是经过大脑处理并重新组织之后，我们才能建立起一系列比较清晰的光的相关概念。他认为在这个构建过程中，一个关键因素来源于人类对空间直观的、综合性的先验性理解，而在历史上这种理解是以欧几里得几何学为基础形成的。康德相信欧几里得为形成空间概念和处理空间提供了唯一正确的路径，并且这种对空间直观的普适性认识是我们关于自然世界的经验的核心。按康德的话说[175]：

> 空间不是一个源自于外部经验的经验性概念……空间是一种必要的、先验性的事实陈述，它形成了所有外部直觉的基础……基于空间这种先验性陈述的必要性，我们才能推导出所有的几何原理都是无可置疑地确定，而且对它们进行诠释的可能性也是先验的。因为如果对空间的直觉是一种后验性的归纳概念，也就是说来自一般性的外部经验，那么数学定义的基本原理就只能看作是感知了。而且这些原理还会受到感知过程中所有意外事故的影响，那样一来，两点之间只有一条直线这样的公理将不再是必然的了，它只能是每次依据经验而传授的知识。

简单地说，根据康德的理论，如果我们意识到一个物体，那么这个物体必然是在空间中存在的，并且是符合欧几里得几何学的。

休谟和康德认为有两点非常重要，这两点有极大不同，但都与欧几

里得几何学紧密相关。首先，他们都认为只有欧几里得几何才能精确描述物理空间。其次，他们都把欧几里得几何作为牢不可破、绝对精确和永远有效的推理结构。把这两条综合在一起的话，休谟和康德认为，欧几里得几何为数学家、科学家、哲学家们提供了最稳固的关于宇宙的确存在、内容丰富、无可辩驳的理论证据。直到 19 世纪之前，这种认识仍然被视为是理所当然的。但是它们真的是正确的吗？

欧几里得几何是由古希腊亚历山德里亚数学家欧几里得在公元前 300 年左右提出的。在他那本不朽的 13 卷本的《几何原本》中，欧几里得以清晰的逻辑为基础建立几何学体系。他以数十条被认为正确性无可置疑的公理为起点，通过逻辑推理的方法，证明了大量以假设为基础的命题。

欧几里得几何学的前 4 条公理[176]简洁、巧妙而又优美，例如第一条公理是：两点之间只能有一条直线。第四条公理是：所有直角都是相等的。而与此形成鲜明对比的是第五条公理，它通常被称为“平行公设”，关于它的表述相对而言比较复杂，并且一直以来人们普遍认为这一公理缺乏一种不证自明的味道，在《几何原本》中它是这么说的：“若一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两个直角之和，那么这两条直线在各自不断地延伸后，会在该侧相交。”图 6-1 使用了一幅示意图展示这条公理的内容。虽然没有人怀疑它的正确性，但它与其他几条公理相比，缺乏那种能给人留下深刻印象的简洁和优美。有迹象表明，甚至是欧几里得本人似乎都对他的这条第五公理不是十分满意，第一个证据是欧几里得在他的《几何原本》证明第二十八条命题时就没利用他的这条第五公理[177]。今天我们引用最频繁的是与“第五”公理完全等价的另一个公理，它似乎是由希腊数学家普罗克洛斯（Proclus）在公元 5 世纪首次提出来的，但是我们通常称之为“普莱菲尔公理”[这个名称来自于苏格兰数学家约翰·普莱菲尔（John Playfair，1748—1819）]。普莱菲

尔公理是这样表述的："给定一条直线和不在这条直线上的一个点，经过这个点只能作一条与该直线平行的直线。"（如图 6-2 所示）。第五公理的这两种表述形式本质上是完全相同的，这是因为普莱菲尔公理（与其他公理一起）必然包含欧几里得的第五公理，而且后者也包含前者。

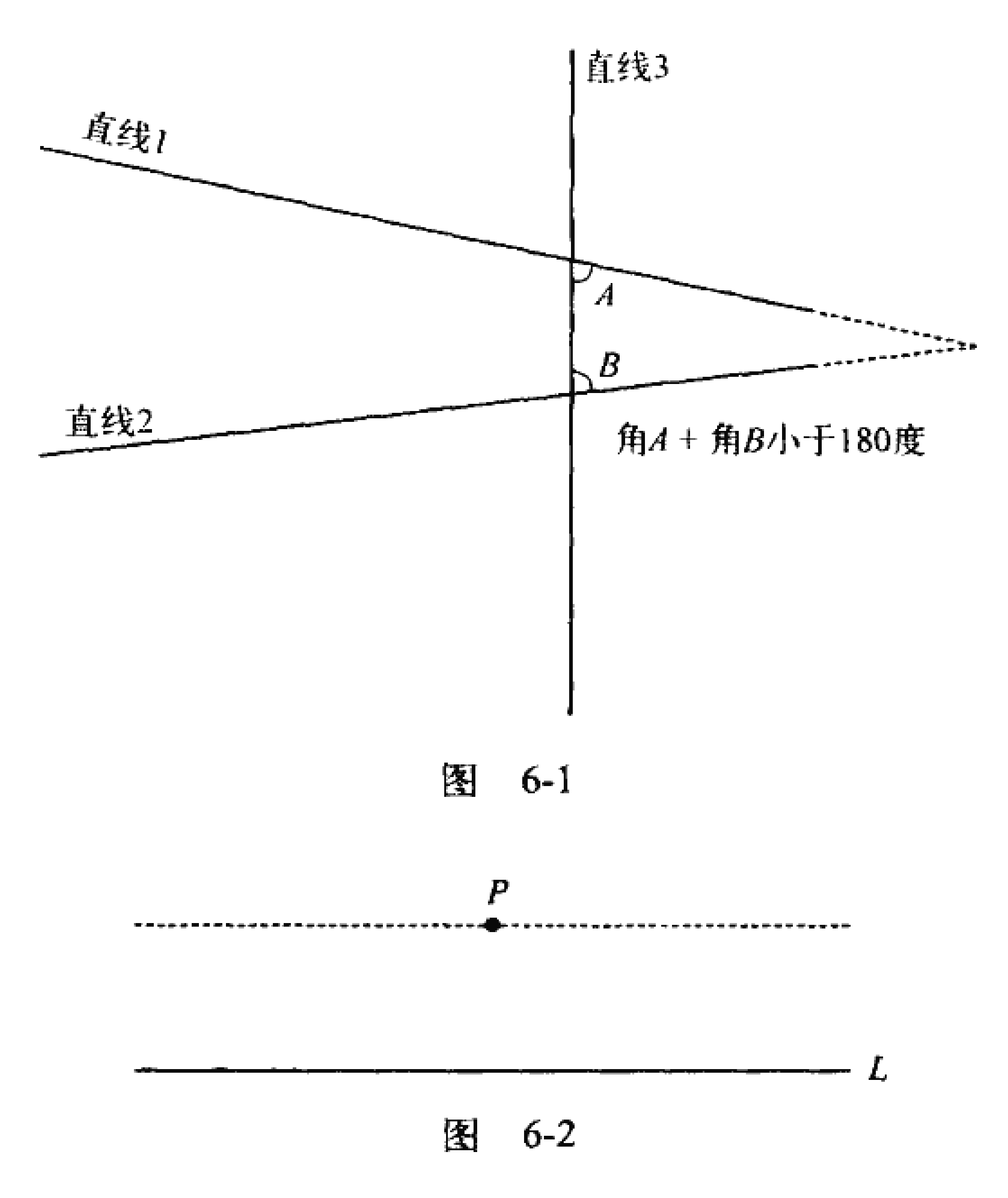


图 6-1

图 6-2

几个世纪以来，对欧几里得几何第五公理的置疑就不绝于耳，不断有人试图从其他 9 条公理出发证明第五公理，甚至还有人尝试用一条更清晰简洁的假设来代替它，当然这些努力都没有成功。尽管如此，仍然有一些几何学家试图回答另外一个同样令人困惑并引人注目的问题："如果它是假的呢？"（如果第五公理事实上是一条假命题的话，会发生什么呢？）这个问题开始逐步蔓延[178]，甚至有人怀疑欧几里得的公理到

底真的是不证自明的，还只是基于经验的。最终另人震惊的结论在 19 世纪出现了：数学家们发现人们通过选择另外一条不同于欧几里得第五公理的公理，就可以建立一门全新的几何学。而且，那些“非欧”几何学能像欧几里得几何学那样从原理上准确地描述物理空间。

这里让我们暂停一下，先来把“选择”这个词搞清楚。几千年来，欧几里得几何一直被认为是独一无二并且是必然如此的——它被认为是对空间唯一正确的描述。而人们可以选择公理并且得到同样正确的描述这一事实使人们对整个概念体系产生了深厚兴趣。仔细构建的推理体系似乎一夜之间变成了一场游戏，在这个游戏中公理只不过是扮演了规则的角色。你可以通过改变公理来玩另外一场完全不同的游戏。不过，真正实现对数学本质的理解，它所带来的冲击力之巨大，如何强调都不为过。

事实上，许多富有想象力和创造力的数学家为完成对欧几里得几何最后的攻击铺平了道路。其中值得特别关注的有：基督教神父吉罗拉莫·塞开里（Girolamo Saccheri，1667—1733），他深入研究了如何用另外一种不同形式的表述来代替第五公理；德国数学家乔治·克鲁格（Georg Klügel，1739—1812）和约翰·海因里奇·兰勃特（Johann Heinrich Lambert，1728—1777），他们俩第一次意识到欧几里得几何可能被其他的几何学体系所替代。除此之外，还有一些数学家为埋葬欧几里得几何是唯一的一种宇宙空间表现形式这一思想的棺材，钉下了最后一颗钉子。这一荣誉应当由三位数学家来分享：一位来自俄罗斯，一位来自匈牙利，还有一位来自德国。

奇异的新世界

第一位公开发表文章从整体阐述这门全新几何学的人（这是一门建立在像马鞍那类弯曲的表面之上的几何），就是俄罗斯数学家尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基（Nikolai Ivanovich Lobachevsky，1792—1856，

如图 6-4 所示）[179]。在这门几何学中（今天我们称为双曲面几何），欧几里得第五公理的表述就变为了如下的形式：在平面上给定一条直线和不在直线上的一点，经过这个点至少能作出两条与给定直线平行的平行线。罗巴切夫斯基几何学与欧几里得几何学还有一个重要的区别，在欧几里得几何中，三角形的内角和总是 180 度（如图 6-3b 所示），而在罗巴切夫斯基几何中，三角形的内角和总是小于 180 度的。由于罗巴切夫斯基的学术观点主要发表在《喀山公报》(*Kazan Bulletin*) 上，这份杂志在当时并不出名，所以他的理论完全没有得到应有的重视，直到 19 世纪 30 年代，有关罗巴切夫斯基几何的理论被翻译为法语和德语后才引起人们的广泛关注。在此之前并未看到罗巴切夫斯基文章的匈牙利年轻的数学家哈诺斯·波约（János Bolyai，1802—1860）[180]在 1820 年左右也系统阐述了与罗巴切夫斯基几何类似的几何学理论。出于年轻人特有的激情，他在 1823 年给他父亲的信中[他的父亲法卡斯·波约（Farkas Bolyai）也是一名数学家，图 6-5 是他的肖像]写道："我发现了一些东西，它太优美了，这让我震惊不已，但同时又让我情不自禁地为它着迷……我从一片虚无中创造了一个全新的世界。"在 1825 年，哈诺斯已经完成了他的研究，并准备让他的父亲看看他关于这门新几何学的理论著作草稿初案。哈诺斯把他的手稿命名为《空间的科学绝对》(*The Science Absolute of Space*) [181]。虽然年轻的波约兴高采烈，但他的父亲却不能确定这种理论的正确性。不过，法卡斯还是决定把哈诺斯的新几何作为他本人两卷本著作的附录一块出版，法卡斯的书是以研究经典几何、代数和解析学的基础为主要内容的。据说这本书写作手法十分有趣，书名就叫《为好学的年轻人所写的关于数学基本原理的随笔》(*Essay on the Elements of Mathematics for Studious Youths*)。书出版后，法卡斯送给了他的朋友卡尔·弗里德里希·高斯（1777—1855，如图 6-6 所示）一本，而高斯不仅在当时就被认为是最杰出的数学家，并且被后世许多人推崇为人类

有史以来最伟大的数学家之一，足以和阿基米德和牛顿相提并论。由于霍乱的传播，送给高斯的那本在混乱中遗失了，法卡斯又给高斯送去了另外一本。高斯在 1832 年 3 月 6 日给法卡斯回了信。不过他的评论与年轻的哈诺斯所期望的并不完全一样。

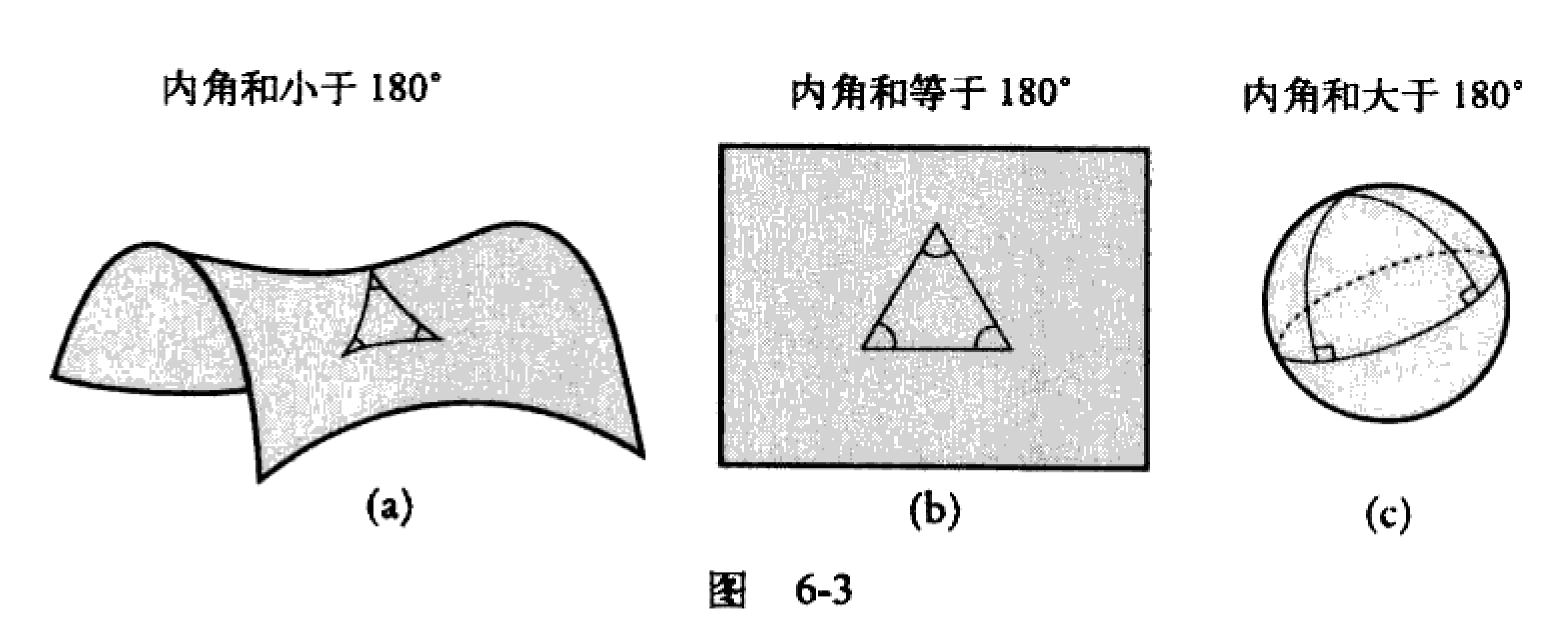


图　6-3

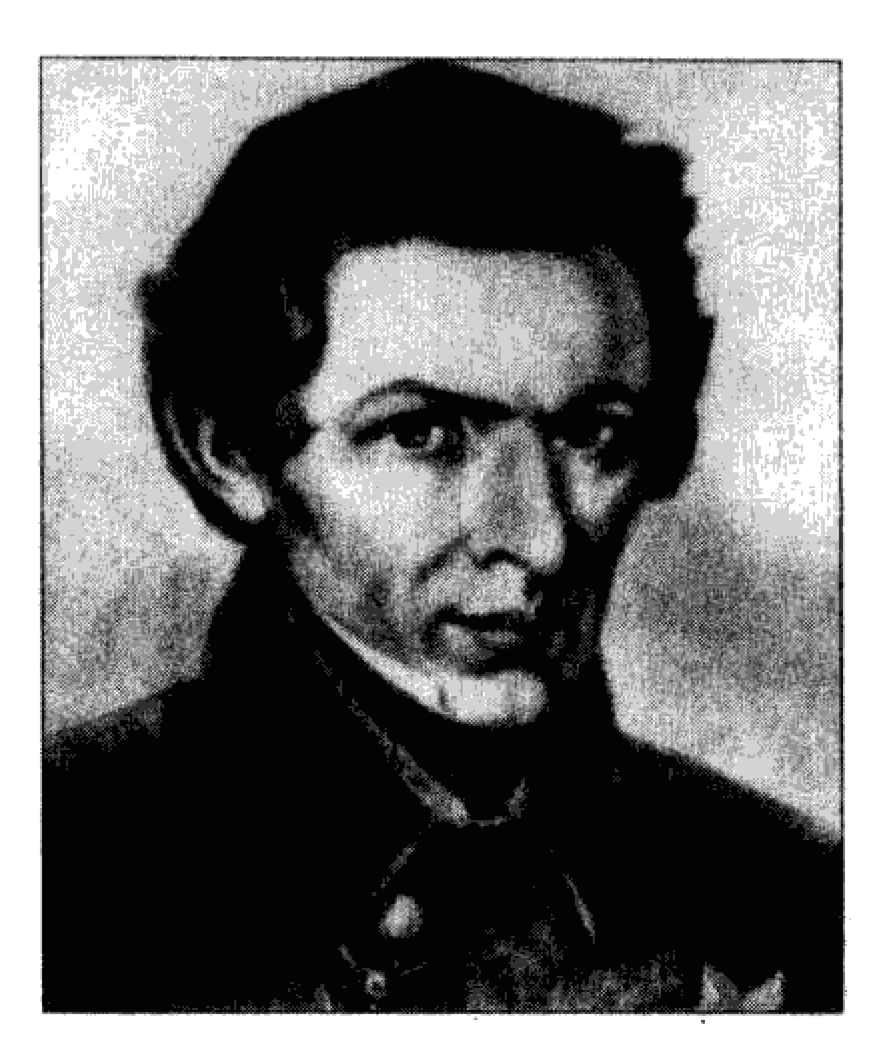


图　6-4

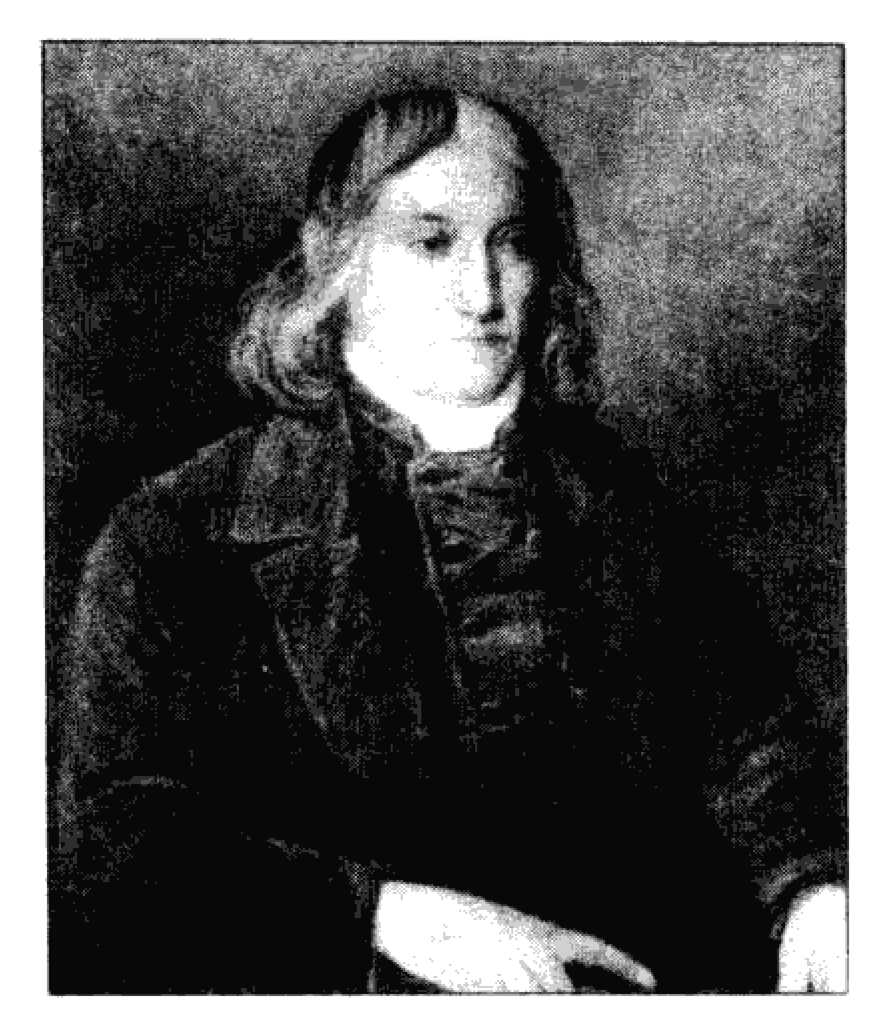


图 6-5

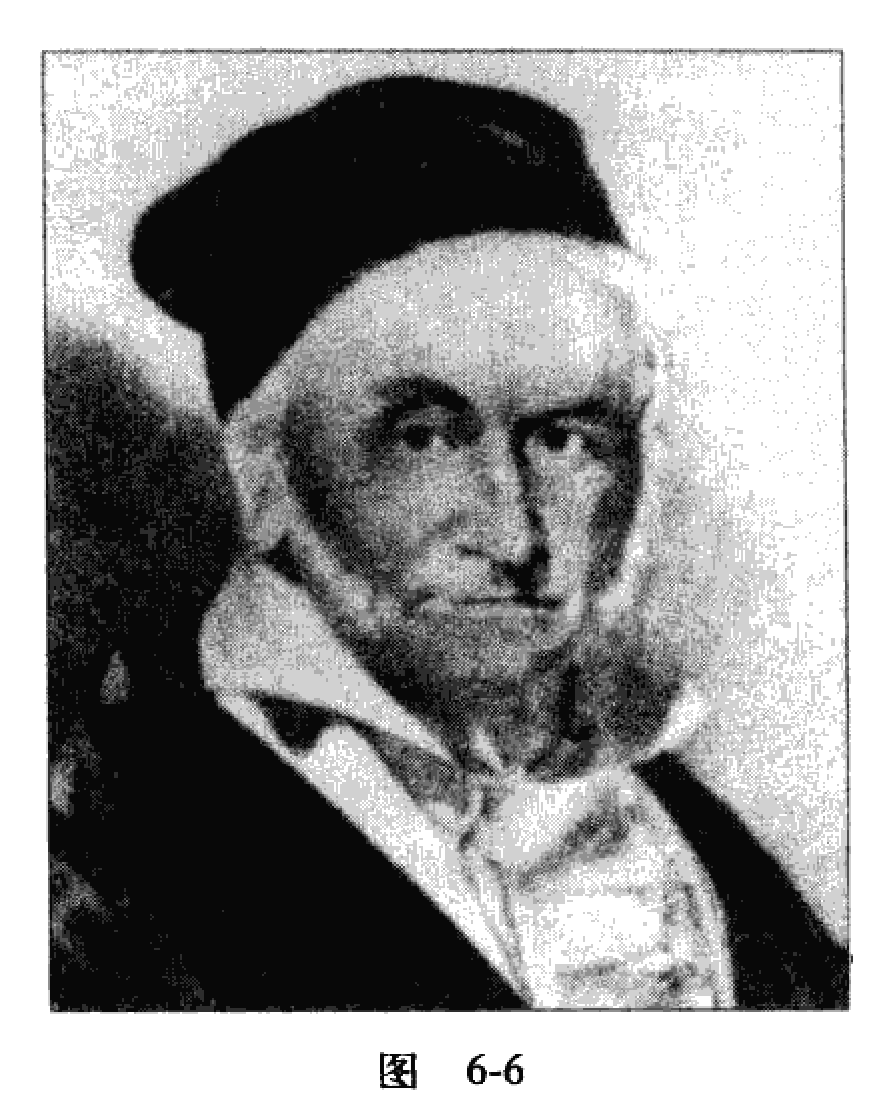


图 6-6

> 如果一开始我就说我不能称赞这本著作，您也许会感到十分惊讶。但是除此之外，我的确没法再说别的。这是因为如果我表扬它，实际上就是表扬我自己。事实上，这本书的所有内容，您的儿子的思想，他所得出的结论，与我的想法几乎一模一样，而在过去的30或35年里，这些想法一直都占据着我大脑的一部分。在那段时间，我始终都有些茫然，不知所措。迄今为止我从未把我的思考结论写下来，而且我当时想在我的有生之年都不会把它们拿出来发表。

我在这里要插上一句，很明显高斯害怕这种激进的新几何学被康德学派的哲学家们（高斯称他们为“皮奥夏人”，这是一个野蛮未开化的部落，古希腊语中这个词是“愚蠢”的同义词）当做哲学中的异端邪说。之后高斯继续写道：

> 在另一方面，我当时又想以后把它们都记录下来，这样至少它们不会随着我一起消失。因此对我而言这真是一个惊喜，这让我省却了记录它们的麻烦，并且我十分高兴是我的老朋友的儿子先于我之前把这些思想用文字表达了出来。

虽然法卡斯感到高斯对哈诺斯的评价很高，他认为高斯的赞扬“非常令人满意”，但是哈诺斯却因为他的研究与高斯的思想完全相同而倍受打击，并且从此之后彻底消沉了。在接下来的近十年时间里，他一直拒绝相信高斯在他之前已经开始研究这门几何的说法，而且这还严重影响了他们父子之间的感情（哈诺斯怀疑他父亲过早地把他的研究结论透露给了高斯）。后来，当哈诺斯最终确认高斯的确在1799年左右就开始研究这一课题时，他变得更加愤世嫉俗，这种糟糕的心态也影响了他的学术研究。在波约去世前，他留下了大约两万页的数学手稿，但是相比而

言，这些研究显得暗淡无光。

不过，毋庸置疑，高斯的确对非欧几何进行了大量思考[182]。在1799年9月他的一篇日记中，高斯写道："关于几何的原理方面我们取得了非凡的成就。"接着他在1813年又提到："在平行线理论中，我们现在并不比欧几里得知道得更多。这是数学中让人脸红的一部分，它迟早会变成另外一种完全不同的形式。"几年之后，高斯在他1817年4月28日所写的一封信中又讲道："我现在越来越确信我们现在的（欧几里得）几何学的必然性并不能被证实。"最终，与康德的观念相反，高斯得出的结论是欧几里得几何并不能被看做普适的永恒真理，并且"不能"把欧几里得几何与算术相提并论（因为算术是先验性的），但是大致可以与力学相提并论。"费迪南德·施韦卡特（Ferdinand Schweikart，1780—1859），一位法理学教授，他在1818年或1819年左右写信告诉高斯，他也独立得出了类似的结论。由于高斯和施韦卡特都没有公开发表过他们的观点和结论，所以传统上一直把发现非欧几何的荣誉归于罗巴切夫斯基和波约，尽管他们两位也不能被视为非欧几何的唯一"缔造者"。

双曲面几何犹如晴天霹雳一般打破了数学世界的沉寂，它给欧几里得几何学是唯一正确、不可动摇的空间描述这一观念带来了沉重打击。在高斯、罗巴切夫斯基和波约之前，欧几里得几何事实上长期以来一直被看做是世界的本质。人类可以通过选择不同的公理集来构建一门完全不同的几何，这一事实第一次引发了人们的疑问：数学似乎是人类的发明，而不是独立存在于人思维之外的、等待人类去发现的真理。同时，欧几里得几何学与真实的物理空间之间直接联系的破裂，也暴露了数学是宇宙语言这种思想的致命缺陷。

当高斯的一名学生伯恩特·黎曼（Bernhard Riemann）证明双曲面几何并不是非欧几何的唯一形式时，欧几里得几何学的优越地位变得更加岌岌可危了。黎曼于1854年6月10日在哥丁根做了一场闪耀

着天才思想火花的演讲（图 6-7 展示的是这篇后来公开发表的演讲稿的第一页），他以几何基础为前提表达了自己的观点[183]。黎曼一开始就说："几何学预先假设了空间的概念，并假设了空间构建的基本原理。但是，它对空间的那些概念和原理仅仅是给出了名义上的定义，而这些概念和原理的本质说明是以公理的形式出现的。"他接着指出："那些预先假设之间的关系还不为人所知。我们并不能看出，它们之间的任何联系是否是必然的，或者在多大程度上是必然的，甚至这些联系是不是可能的也不能完全确定。"在各种可能的几何学理论中，黎曼重点研究了椭圆面几何，这是一门建立在椭圆体表面上的几何理论（如图 6-3c 所示）。请注意，在这门几何学中，两点之间最短的线并不是一条直线，而是大圆上的一段弧，而这个圆的圆心应当恰好是球心。航空公司就是利用了这一特性来确定航线的，所以从美国到欧洲之间的国际航班飞行线路并不是地图上看到的直线，事实上是一段向北的大圆弧。你可以很轻易地证明，任何这样的两段大圆弧都会在直径对置的两点相交。例如，地球上的任意两条经线，在赤道上似乎是平行的，但却会在两极相交。在欧几里得几何学中，经过直线外的一点只能作一条与该直线平行的平行线。而非欧几何则不同，在双曲面几何中，经过直线外的一点至少能作两条与该直线平行的平行线，而在椭圆面几何中，连一条这样的平行线都没有。黎曼把非欧几何的概念推向了更为广泛的天地——他把这类几何引入到了三维、四维，甚至维度更高的空间曲面中。在这个过程中，黎曼研究并拓展的一个关键概念是曲率，曲率标识了曲线或曲面的弯曲比率。例如，在一个鸡蛋壳的表面上，鸡蛋蛋壳中段部分的曲线要比经过蛋壳两端尖头的曲线平缓，也就是说曲率要小。黎曼提出了任意多维的空间中曲率的精确数学定义。在提出这个定义时，他进一步完善充实了最早由笛卡儿发展的几何与代数这两者间的"结合"。在黎曼的研究中使用的有任意多个

变量的代数等式，都能在几何学中找到对应，并且高级几何中的新概念也成为了代数等式的一部分。

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1].

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind

图 6-7

欧几里得几何并不是19世纪几何发展之后唯一的受害者，康德的空间思想也未能幸免。让我们回想一下我在前面提到过的，康德曾经断言人类感知到的信息，在进入人类的意识之前，必须经过欧几里得几何学中的模板进行重新组织。但是，似乎19世纪几何学家们的直觉在一夜之

间全部被唤醒了，很快他们就在非欧几何领域取得了众多进展，并且开始学习沿着非欧几何指明的全新道路去感受世界。最终，欧几里得几何学对空间的感知竟然被证明是学来的，而不是通过直觉获取。所有这些剧烈的变化使得著名的法国数学家亨瑞·庞加莱（Henri Poincaré，1854—1912）认为，几何的公理“既不是综合的先验性的直觉，也不是经验事实。它们是约定俗成的。我们根据经验事实作出选择，这种选择是自由的。”换句话说，庞加莱仅仅把公理视为“伪装的定义”。

庞加莱[184]的观点并不只是受到迄今为止我们所提过的非欧几何的启发，同时也受到当时不断涌现的其他新几何的鼓舞，在 19 世纪末前，这些新几何的发展似乎不受控制了。例如，在投影几何学中（比如当电影胶片上的影像被投射到屏幕上时形成的图形）可以完全把直线和点这两个角色互换，因此关于点和线的定理（请注意这里的次序）能变为线和点的定理。在微分几何学中，数学家利用微积分研究各种数学空间局部的几何属性，例如球面或环面上的几何属性。上述这些几何以及其他一些类型的几何，乍一看上去似乎是数学家充满想象的发明，而不是对物理空间的精确描述。那么后人又是如何为上帝是数学家这一概念辩护的呢？毕竟，如果“上帝总在研究几何学”（历史学家普卢塔克认为这句话出自柏拉图）的话，哪一种几何是神采用的呢？

很快，对欧几里得几何缺点的深刻认识引起了数学家对数学基础的普遍关注，特别是数学与逻辑之间的关系。在第 7 章中我们还会继续讨论这个重要的主题。这里我仅仅提一句，公理是不证自明的这一观点已经动摇了。虽然 19 世纪的人们也见证了代数和解析领域其他一些重大的进展，但是几何学的发展对数学本质问题的影响是最深远的。

空间、数字和人类

在数学家们转而研究数学的基础这一主题之前，一个相对而言“不

太重要”的课题迅速引起了他们的关注。首先，那些已经被系统阐述了的非欧几何，虽然已经公开发表，但这并不意味着它们是数学的“合法后裔”。长期以来，在数学界一直存在着对不一致的恐惧——将这些非欧几何引入最终的逻辑结果可能会产生无法解释的矛盾。在19世纪70年代，意大利人尤金·贝尔特拉米（Eugenio Beltrami，1835—1900）和德国人费利克斯·克莱因（Felix Klein，1849—1925）证明了只要欧几里得几何是一致的，那么非欧几何与其一样也是相容的。然而，这一证明却为欧几里得几何基础的稳固性带来了更多问题。接下来，还有一个与此紧密相关但更为重要的问题。大多数数学家把这些新的几何学当做一件新奇的好玩事物。一直以来欧几里得几何学被视为对真理空间的描述，这也奠定了欧几里得几何学的历史声望，而在刚开始时非欧几何被认为与物理现实并没有任何联系。因此，非欧几何被许多数学家当做是欧几里得几何的“穷亲戚”。然而，在这些人之中，亨瑞·庞加莱却比其他任何人都更加重视非欧几何。但是，即使是庞加莱本人也坚持认为就算人类真的被带入了一个由非欧几何主导的世界，有一点仍然“确定无疑，我们不会发现作出这样的改变会更容易”，即从欧几里得几何变为非欧几何。因此，有两个问题突显出来：（1）几何学（个体）和数学（整体）的其他分支能建立在稳固的、不证自明的逻辑基础之上吗？（2）数学和物理世界之间的关系（如果这种关系的确存在的话）究竟是什么？

历史上，有一些数学家在确认几何的基础时采用了一种实用主义的方法。由于意识到过去他们视为绝对真理的东西，却被最终证明是基于经验的、而非精确的，他们感到很失望，于是转向了算术，也就是对数字的研究。笛卡儿的解析几何中，图形可以由一个特定的公式来表达，平面上的点可以用一对有序的数字唯一标识，等等，具体内容请参阅第4章。这种几何以数字为基础，为重新建立几何基础提供了必要的工具。

德国数学家雅各布·雅各比（Jacob Jacobi，1804—1851）用他自己的座右铭“上帝总是在研究算术”代替了柏拉图的名言“上帝总是在研究几何”，这虽然只是文字上的小小改变，但是却真实表达了当时的社会风潮。不过，在某种程度上，这仅仅只是把问题转到了数学的另外一个不同的分支中。事实上，著名的德国数学家大卫·希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）已经成功地证明了欧几里得几何的一致性与算术的一致性是同样长久的，不过在这个问题上，算术距离建立起一种毫不含糊、并且一目了然的一致性还有很遥远的路要走。

在数学和物理世界的关系上，一种新的感情还没有真正确立起来。几个世纪以来，把数学理解为解读宇宙奥秘的工具的观点已经深入人心，并且不断被强化。伽利略、笛卡儿、牛顿、伯努利家族、帕斯卡、拉格朗日和奎特莱特以及其他数学家们都证实了，自然界是在数学基础上设计的，而科学的数学化被看做是这一观点强有力的证据。甚至人们直接问：如果数学不是宇宙的语言，那么为什么它在解释自然的基础规律和人类社会特征方面都同样有效？

可以确信的是，数学家们的确意识到数学仅仅处理的是柏拉图形式的抽象问题，但是它们被视为物理元素的理想化形式。事实上在他们看来，自然这本大书是用数学这门语言所书写，这种感受已经深深地根植于他们的观念之中，以至于许多数学家根本就拒绝思考数学概念和结构不能直接与物理世界相关联的可能性。我们以杰罗拉莫·卡尔达诺（Gerolamo Cardano，1507—1576）为例。卡尔达诺是一位十分有趣的人，他在数学领域和物理学领域都建树颇多，但同时也好赌成性。1545 年他出版了一本十分有名的书《大衍术》（*The Great Art*），这本书是代数学史上最有影响力的学术著作之一。在这本综合性的专著中，卡尔达诺深入分析了代数方程解法的大量细节性问题，包括二次方程式（未知量以平方幂 x^2 的形式出现）、三次方程式（x^3）和四次方程式（x^4）的解法，其

中有很多研究是开创性的。然而在经典数学中，参量通常被理解为几何元素。举例来说，未知变量一次幂 x 的值等同于直线上的一段长度，二次幂 x^2 通常被理解为面积，而三次幂 x^3 被认为是相应实体的体积。所以在《大衍术》中的第一章，卡尔达诺解释到[185]：

> 我们以立方体，以及其他顺带提到的形状结束我们的这些细节性思考。因为一次幂（Positio）涉及直线，平方（Quadratum）涉及平面，立方（Cubum）涉及立体，对我们而言，让幂次超过它们的行为都是极端愚蠢的，因为自然界不允许这样。因此，我们将会看到，这些（方程式）最多到立方就能完全说明问题了。如果再增加其他的，不管是出于必要，或仅仅是因为好奇，我们都不可能走出去。

换句话说，卡尔达诺认为我们能认识到的物理世界只包含三个维度，因此对数学家而言，关心更多维度，或考虑更高阶数的方程式都是愚蠢的行为。

英国数学家约翰·沃利斯（John Wallis，1616—1703）在他的著作《算术的无限》（*Arithmetica Infinitorum*）中也表达过同样的观点（牛顿曾经从这本书中学习过解析的方法）[186]。在另外一本重要的著作《代数论文集》（*Treatise of Algebra*）中，他公开宣称："确切地说，自然界不承认三维以上的概念。"在历史上这是第一次有人这么明确地提出这一观点。接着，他又详细解释了他的观点：

> 两条线相交，会形成一个平面；平面与直线相交，将会形成一个立体。但是，如果立体与一条直线相交，或者平面与平面相交，会形成什么呢？超平面（plano-plane）？这将是一个

> 自然的怪物，并且比客迈拉①和赛菿②更不可能存在。因为长度、宽度和高度已经构成了整个空间。我们想象不出任何超越三维的第四维空间是什么样子。

在这里沃利斯的逻辑是十分清晰的：即使是想象一门并非描述真实空间的几何学，也是没用的。

这些观点最终还是逐渐被改变了[187]。18 世纪的数学家第一次开始思考以时间作为三维空间之外的潜在的第四维。在 1754 年发表的一篇名为《维度》的文章[188]中，物理学家简・达朗贝尔（Jean D'Alembert，1717—1783）写道：

> 我在上面已经声明过不可能有比三维更多的维度。我有一位朋友，他就认为可以把时间当做空间的第四维，从某种程度上讲，这就使时间的"立体"成为了四维的产物。这种思想是富有争议的，但是对我而言，它并不仅仅只是一种吸引人们眼球的新奇看法，还是很有价值的。

著名的数学家约瑟夫・路易斯・拉格朗日则走得更远，在 1797 年他以更加自信的语气说道[189]：

> 由于一个点在空间中的位置取决于三个立体的坐标，这些坐标在力学问题中被认为是 t（时间）的函数，因此，我们可以把力学视为四维的几何学，并且还可以把力学分析视为几何分析的拓展。

---

① Chimera，古希腊神话中喷火的怪物，是一个狮头、羊身、蛇尾的组合体。——译者注

② Centaure，古希腊神中半人半马的怪物，上半身是人，身体和腿是马。——译者注

这些大胆的思想为数学的拓展开辟了新的天地——任意维度的几何学，这在过去是不可想象的，事实上这些几何学完全不考虑它们是否与物理空间有联系。

康德相信我们对空间的认知完全遵循欧几里得几何给出的范型，他也许真的错了。但是我们在大多数情况下感知到的都是不超过三维的空间，这一点是毫无疑问的。相比较而言，我们可以轻易地想象出我们身处的这个三维世界，在柏拉图所谓的两维的宇宙世界里是什么样的，然而，如果从三维世界出发，向多维世界迈进，则的确需要数学家一样丰富的想象力。

在研究 n 维几何（在任意维度空间中的几何）时，最重要的、突破性的工作是由赫尔曼·巩特尔·格拉斯曼完成的（Hermann Günther Grasmann，1809—1877）。格拉斯曼[190]有兄弟姐姐 11 人，而他本人则是 11 个孩子的父亲，也是一位学校老师，他从未接受过任何正规的大学数学教育。在格拉斯曼的一生中，他在语言学方面得到的褒奖（特别是他在梵语和哥特语方面的研究）要比他在数学上获得的成就多得多。一位传记作者曾经写道："似乎格拉斯曼命中注定要不时地被人们重新认识，而且每次重新认识他的时候，他都好像自去世以后，已被人们完全忘记。"格拉斯曼创立了一门关于"空间"的抽象学问，在他的这门空间的学科中，经典的欧几里得几何学不过空间的一个例子。格拉斯曼在 1844 年出版了一本书，名为《线性延伸理论：数学的一个新分支》，通常又被人们称为《延伸理论》（*Ausdehnungslehre*）。在这本书中他介绍了他那独具开创性的思考，其中最主要的思想构成了我们今天所熟知的数学的一个重要分支——线性代数。

在这本书的前言中，格拉斯曼写道："几何决不能被看做……数学的分支；事实上，几何与自然界的某些特性（也就是所谓的空间）联系在了一起。我已经意识到一定有一门数学的分支，它以一种纯粹的抽象方

式带来与那些几何类似的规则。”

这是一种看待数学本质的全新的认识。对格拉斯曼而言，传统的几何（它们是古希腊思想的遗产）处理的是物理空间，因此不能被当做抽象的数学的真正分支。在格拉斯曼看来，数学在某种程度上是人类思维的抽象观念，并且不必在真空世界中有任何实际的应用。

跟随格拉斯曼那表面上显得有点琐碎的思维，迈向他所构建的几何代数理论是一段十分有趣的历程[191]。他以一个非常简单的公式 $AB+BC=AC$（如图 6-8a 所示）作为研究的起点，任何一本几何书在讨论线段的长度时都会引用这个公式。但是，格拉斯曼注意到了其他一些有意思的现象。他发现，如果不考虑点 A、B、C 的顺序，只要不把 AB、BC 这样的因子仅仅理解为长度，并且赋予它们“方向”（例如 $BA=-AB$），公式依然是正确的。举例来说，如果 C 位于 A 和 B 之间（如图 6-8b 所示），那么，$AB=AC+CB$，但是，由于 $CB=-BC$，我们可以发现，$AB=AC-BC$，此时，只要在这个公式两端简单地增加 BC，就又能得到最初的公式 $AB+BC=AC$ 了。

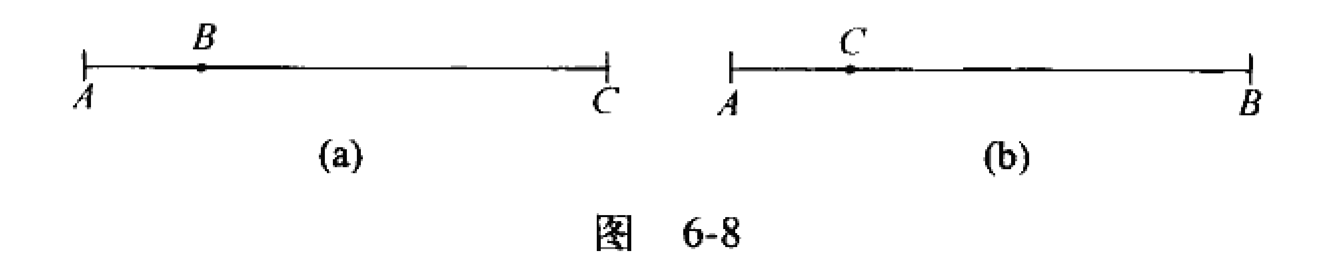


图　6-8

这是一个十分有价值的发现，但是格拉斯曼对它的延伸和拓展要更加让人吃惊。请注意，如果我们处理的是代数，而不是几何的话，那么诸如 AB 之类的表达通常表示 $A\times B$（A 与 B 的乘积）。在这种情况下，格拉斯曼提出的 $AB=-BA$ 就违背了一条神圣不可侵犯的数学法则：两个数量的乘积与这两个数量在相乘时的次序是无关的。格拉斯曼直接面对了这种令人不安的的可能性，并且最终发明了一种全新的、一致的代数，也就是今天我们称之为外积代数的数学分支，这门代数允许多个因数相

乘，与此同时，也就能相应地处理任何维度中的几何问题。

到19世纪60年代，n维几何[192]犹如雨后春笋般迅速地发展起来了。这一时期，不但黎曼在他一系列极具启发意义的演讲中，逐步建立起了任意曲面及任何维度的空间的概念（这是n维几何研究的基础），而且，当时的许多数学家，例如英国的阿瑟·凯莱（Arthur Cayley）、詹姆斯·西尔威斯特（James Sylvester）和瑞士的路德维格·施拉夫利（Ludwig Schläfli）都为n维几何的发展作出了重要贡献，他们的研究为n维几何增加了新的内容。从此之后，数学家们开始感到他们从严格的限制中解放了出来，而这种限制就是几个世纪以来数学一直被严格限定在空间和数字的概念上，这种限定的历史惯性是十分强大的，甚至直到18世纪，伟大的瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）在一次表达他对数学的看法时说："数学，在通常情况下是一门研究数量的科学，或者是研究测量方法的科学。"只有在进入19世纪以后，变革的春风才逐渐吹起。

首先，抽象的空间概念的引入和无限的观念（包括几何和集合理论中）模糊了"数量"和"测量"的意义，某种程度上也超越了人类的一般认知。其次，迅速积累的对数学的抽象研究使数学与物理现实的距离也越来越远，而日常生活和"现实存在"却进入了抽象领域。

乔治·康托（Georg Cantor，1845—1918），他是集合理论的创建者，用以下的"独立宣言"描写了这种全新发现的数学的自由精神："数学在总体上是自由发展的，而唯一限制它的则是不证不明。也就是说，它的概念必须是彼此一致，同时还必须根据定义排序，与那些先前已经被引入的，并且已经证实了的概念有正确的关系。"[193]对于这种观点，代数学家理查德·戴得金（Richard Dedekind，1831—1916）在时隔6年后补充道："我认为数学的概念完全独立于我们对空间和时间的观念或直觉……它们是人类思想的创造产物。"[194]换句话说，康托和戴得金都把数学视为一种抽象的、概念性的研究，这种研究只受到一致性要求的限

制，它对计算或物理世界的语言不承担任何义务。正如康托总结的："数学的本质完全在于它的自由。"

到19世纪末，绝大多数数学家都接受了康托和戴得金关于数学自由特性的观点。数学的目标也从研究自然的真理转变为建立抽象结构——构建公理体系和探寻那些公理在逻辑上所有可能的结论。

人们曾经一度乐观地认为这些观点和理论的新发展，将会使那个烦人的问题——数学究竟是人类的发现还是人类的发明——最终走向终结。如果数学只不过是一场非常复杂的游戏，有任意的规则，那么很明显，相信数学概念的真实性是毫无意义的，不是吗？

令人吃惊的是，物理现实的新突破使数学家获得了某些恰好相反的感受。与数学是人类的发明这种看法相比，他们又重新回到了柏拉图提出的数学是独立的真理世界这一思想中。这个独立的真理世界的存在和物理世界的存在一样真实。试图在数学和物理之间建立联系的努力被划分为应用数学范畴，这与被认为根本不关心任何物理现实的理论数学形成了鲜明对比。法国数学家查尔斯·埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）于1894年3月13日给荷兰数学家托马斯·乔安纳斯·司蒂吉斯（Thomas Joannes Stieltjes，1856—1894）写了一封信，他表达了对这一问题的看法[195]，他写道：

> 我非常欣慰地看到你已经转变为一位自然学家来观察算术世界的现象。你所信奉的信条和我的完全一致。我相信数学解析中的数字和函数绝非人类思维的产物；我认为它们独立存在于我们的思维之外，与客观现实有相同的、必要的特征，我们面对它们、发现它们并且研究它们，正如物理学家、化学家和生物学家在本学科领域内的研究一样，并无什么本质区别。

英国数学家戈弗雷·哈罗德·哈代是一位典型理论数学家（我们在

前面介绍过他)，同时也是一位直率的现代柏拉图主义者，他于 1922 年 9 月 7 日在英国科学促进会发表的一场演讲中宣称[196]：

> 数学家们已经建立起数量众多的不同类型的几何学体系。除欧几里得几何学外，还有一维、二维、三维甚至任意多维的非欧几何学。所有这些几何学体系都十分复杂，并且同样正确。它们包含了数学家对它们真实性的观察，与物理学不确定和难以捉摸相比，数学中的真实性要更为突出，并且更加严谨。此时，数学家的作用就变为观察他自己研究的错综复杂的现实系统反映出的事实，通过观察得出令人震惊的、复杂而又优美的逻辑联系，正是这些联系形成了该科学和主要内容。在这个过程中，数学家就好像是一位攀登山脉的探险家，他把沿途看到的内容全部都记录在一系列地图上，这些地图的每一张都是理论数学的一个分支。

很明显，即使有同时代的证据表明数学的自由本质，那些坚定的柏拉图主义者并不准备放下他们的武器。他们发现机会，钻入哈代所谓的“它们的真实性”。这对他们而言，甚至比继续探索与物理真实性之间的关系还要令人兴奋。然而，不论形而上哲学对数学的真理性是如何看待的，有一件事是十分清楚的：对于数字的自由性而言，有一条约束是不会改变的，也是不可动摇的，那就是数学理论在逻辑上的一致性。数学家和哲学家比过去任何时候都更加清醒地认识到数学和逻辑之间的紧密联系是决不能被分割的。但是这就产生了其他的疑问：是不是所有数学问题都能建立在逻辑基础之上？如果能的话，这就是数学那神秘的有效性的奥秘吗？或者，保守一点的话，数学方法通常能运用在推理的研究中吗？在这种情况下，数学不仅是自然界的通用语言，也成为了人类思考的语言。

第7章

逻辑学家：思考推理的人

我曾经在一座小村庄里见过一个理发店，店外的广告标语是这样写的：我仅仅为村子里所有不给自己理发的男人理发[197]。乍一听起来非常有道理，是吧？很明显，一个男人如果能给自己理发的话，那么他就不需要理发师的服务，理发师理所当然应该为所有其他的男人理发。但是，这里有一个问题：谁来为理发师理发？如果他自己理发的话，根据标语来看，他应该算作那些他不能为之提供服务的人员中的一员（给自己理发）。另一方面，如果他不给自己理发，还是根据这则标语，他应该算作他要为之服务的人员中的一分子（不给自己理发）。他是理呢还是不理？历史上比这更显次要的问题曾引发严重的家庭世仇。这种悖论是由伯特兰·罗素（Bertrand Russell，1872—1970）提出的。罗素是20世纪最杰出的逻辑学家和哲学家，他引入这个问题只是为了说明人类的逻辑直觉难免犯错。悖论或二律背反反映了那种表面可以被接受的前提，实际上却导致了不可接受的结论，在上面所举的理发店的例子中，那位理发师既为他自己，但同时又不为他自己理发。这个悖论能解开吗？严格按照上述说法，可能有一种非常简单的解释：这名理发师是一位女性！可是，假设之前我们已经被告知这位理发师就是个男人，那么，首先接受那个前提就只能推导出荒谬的结论。换句话说，这样的理发师根本不可能存在。但这与数学有什么关系呢？事实证明，数学和逻辑是紧密相联的。这里就是罗素本人对这种联系的描述[198]：

> 传统观念一直认为，数学和逻辑是完全独立的，数学与科学相关联，而逻辑则与古希腊联系在一起。但数学和逻辑在现代都得到了极大发展：逻辑变得更数学化，而与此同时数学也更富有逻辑性。其结果是在今天（1919年）想在逻辑和数学之间划一条清晰的界线根本是不可能的，因为它们实际已经合二为一了。它们的区别犹如儿童和成人之间的差别：逻辑是数学的年轻形态，数学则是逻辑的成熟形式。

在这里，罗素实际上是认为在很大程度上数学可以简化为逻辑。换句话说，数学的基本概念，甚至是数字这类基本元素，事实上都可以用推理的基本法则来定义。而且，罗素在后期还更进一步地提出了人类可以用这种定义以及逻辑概念共同促使新的数学定理的诞生。

起初，那些认为数学不过是人类的发明或者是经过精心设计的游戏（这是形式主义论的看法）的人，以及困惑的柏拉图主义者，都认可并接受这种关于数学本质的观点（即大家所知的逻辑主义）。前者很高兴地看到那些表面上并无关系的“游戏”汇总成了“所有游戏之母”；而后者也从中发现，“整个数学体系可能是从一个明确无疑的起源推导而出的”这种思想有可能是成立的，在柏拉图主义者眼中，这使得存在唯一的、形而上的哲学根源的可能性大大增加了。不用说，至少在原则上，存在唯一的数学根源也有助于我们理解数学的力量。

为了完整起见，我必须指出还存在一种学院派的观点——直觉主义①，这种观点与逻辑主义和经验主义完全相反[199]。这一经院式思想的领军人物是颇为狂热的荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔（Luitzen E.J.Brouwer，1881—1966），他相信数字来源于人类对时间的直觉和人类经验中那些不连贯

① 它认为数学知识是以直觉和心理结构为基础的理论，否认某些推理和独立数学对象的观念。——译者注

的时间片断的感觉。对他来说，数学毫无疑问是人类思考的结果，并且罗素提出的那种想象中的、广泛的逻辑法则根本没有存在的必要。布劳威尔还进一步声称，唯一有意义的数学实体是那些以自然数为基础，在经历有限的步骤之后就能被清晰构建的独立实体。因此，不接受那些无法用构造性证明来证实的数学实体，而这占据了数学体系的一大部分。同时，他还对另一个逻辑概念持否定态度，那就是排中律——这一思想认为任何表述要么是正确的，要么就是错误的（不存在部分正确、部分错误的命题）。事实上，布劳威尔认为存在一种中间的第三类情形，在这种状态下，事物都是“悬而未决”的。这些思想，以及其他一些直觉主义者提出的限制，在某种程度上使这种学院派思想逐步边缘化了。尽管如此，直觉主义的某些思想的确预测到了部分认知科学家关于人类如何获取数学知识的研究成果（这是本书第 9 章将要重点讨论的主题），除此之外，这些思想还启发了现代数学哲学家们的思考，并且由此引发了一系列讨论，例如迈克尔·达米特对此就提出了一些他自己的看法。不过达米特的方法本质上还是一种文字游戏，他强有力地说：“数学表达式的意义决定了它的作用，并且反过来又完全由它的作用决定。”[200]

但是数学和逻辑间这种紧密的合作关系是如何发展起来的？逻辑步骤、还有逻辑程序是可见的吗？这里，让我们先简要回顾一下最近 4 个世纪以来逻辑和数学发展历史的几个重要阶段，从中我们可以得到一些有益的启示。

逻辑和数学

传统观念认为，逻辑处理的是概念与命题之间的关系问题，以及从这些关系中提炼总结出正确推论的过程[201]。举一个简单的例子，有这样一个推论：每个 X 都是 Y，一些 Z 是 X，因此一些 Z 是 Y。此时，只要前提是正确的，这一推理就是自动成立的，自动地确保结论的真实有效性。

例如，“每个传记作者都是作家，有些政治家是传记作者，因此，有些政治家是作家”，这一推理过程得出的结论就是正确的。在另一方面，推论“每个X都是Y，一些Z是Y；那么有些Z是X却不一定正确，我们可以举出一些反例，这些例子前提是正确的，但结论却是错误的。比如，“所有人都是哺乳动物，一些有角的动物是哺乳动物，因此，一些有角的动物是人”，这个推论得出的结论是很荒谬的。

只要遵循一些规律，论证的正确性就与陈述的主题无关。例如：

> 这位百万富翁要么是被他的男管家谋杀了，要么是被他女儿杀害了；
>
> 他的女儿没有杀他；
>
> 因此，他的男管家谋杀了他。

上述的例子得出了一个正确的推论。这一论证合理与否与我们对男管家的态度无关，也与百万富翁和他女儿的关系无关。在这里，这个推论的正确性是由命题的一般形式“如果不是p就是q，既然不是q，那么一定是p”的逻辑正确性来保证的。

你也许注意到了，在前面两个例子中，X、Y和Z所扮演的角色与数学公式中的变量非常相似，它们标明了插入语句的位置，在代数式中变量的值就是以同样的方式插入其中的。同样，推论的一般形式“如果不是p就是q，既然不是q，那么一定是p”的真实性使人联想起欧几里得几何学中公理的不证自明。尽管如此，关于逻辑的思考持续了近两千年之后，数学家们才开始认真关注这种推理。

第一位试图把逻辑和数学这两门学科结合成为一门“普适的数学”的人，是杰出的德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Willelm Leibniz，1646—1716），他同时也是著名的理性主义哲学家。莱布尼茨最初学习的是法律，他利用自己的业余时间研究数学、物理和哲

学，他一生中最为人们所称道的是，他几乎与牛顿同时独立地系统阐述了微积分的基础理论，而关于究竟是谁第一个发现了微积分，随后还引发了一系列激烈的争吵。在一篇据说是他 16 岁时就已经开始构思的文章里，莱布尼茨设想了一种通用的推理语言，即万能算学（characteristica universalis）。莱布尼茨把它视为一种终极的思考工具，他想用符号代表简单的观念和思想，而用这些基本符号的组合代表更加复杂的思想观点。莱布尼茨希望仅仅通过代数运算，在所有的学科中都能计算出任何陈述的真实性。他预言，利用适当的逻辑演算，哲学中的争论将可以通过计算得到解决。不幸的是，莱布尼茨在他所开创的逻辑代数这条路上实际上并没有走出很远。除了这条总的“符号思考”的原则外，莱布尼茨还有两个主要的贡献，一个是明确提出什么时候应当把两件事平等对待，另一个是指出同一种陈述不可能既是正确的，又是错误的，在某种程度上这似乎是显而易见的。因此，尽管莱布尼茨的思想充满智慧，但它们几乎完全被忽视了。

对逻辑的研究在 19 世纪中叶又重新活跃了起来，并且似乎是一夜之间涌现出了众多关于逻辑的重要著作。最早的著作来自奥古斯塔·德摩根（Augustus De Morgan，1806—1871），随后有乔治·布尔（George Boole，1815—1864）、哥特洛布·弗雷格（Gottlob Frege，1848—1905）和朱塞佩·佩亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932）等人的大作。

在这些人当中，不能不重点提一下德摩根[202]，他是一位成果颇丰的数学家，其著述多得让人有点难以置信，他一生共发表了数千篇文章，还出版了不少专题著作，主题涵盖了数学、数学史和哲学的诸多方面。在他那些不同寻常的作品中，有近一千年来满月的历书，还有各种各样稀奇古怪的数学问题。曾经有一个人询问他的年龄时，他回答说：“到 x^2 年，我就 x 岁。”你可以仔细想想 1806 和 1871 之间（德摩根出生和去世的年份）的数，找出那个平方数，得出的结论将会是 43。德摩根最富

创见性的贡献可能还是他在逻辑学领域中的研究。他极大地拓展了亚里士多德三段论的范畴，同时又详细分析了用代数方式进行推理的过程。本质上讲，德摩根是一位代数学家，这使他更侧重于以代数的方法研究逻辑，但尤为可贵的是，他同时又用逻辑学家的眼光来分析代数。在他的一篇文章中，他描写了从不同视角分析问题时带来的全新认识："对代数来说，我们必须寻找最习惯的逻辑运用方式……代数学家实际上一直生活在更高的、三段论（推理）构成的环境中，以及由此构成的永不停息的各种关系组合之中，而以前人们并不承认有这种环境存在。"

德摩根在逻辑学上最重要的成果是*判定的量化*（quantification of the predicate），对那些经典时期的逻辑学家来说，这在某种程度上是一个略显夸张的提法。虽然亚里士多德学派已经正确认识到了，从诸如"一些 Z 是 X 和"一些 Z 是 Y"这类前提出发，这些 X 和这些 Y 关系并不是绝对的。举例来说，对于"一些人吃面包"和"一些人吃苹果"这两个前提，关于这些吃面包和吃苹果这两类人之间的关系得不出任何必然的结论。然而直到 19 世纪，逻辑学家还认为，不论这些 X 和 Y 之间必然遵从的关系是怎样的，那么中项（如上所述的 Z）一定在一个前提中是"普适"的，也就是说，这一段一定包括"所有 Z"。德摩根则证明了这种假设是错误的。在他 1847 年出版的《形式逻辑》（*Formal Logic*）一书中，德摩根指出诸如"大多数 Z 是 X"和"大多数 Z 是 Y"这类前提，必然遵循"一些 X 是 Y"。例如，从"大多数人吃面包"和"大多数人吃苹果"这两个前提中，必然得出"一些人既吃面包又吃苹果"。实际上，德摩根走得更远，他甚至用精确的量化形式来表达他提出 Z 的的三段论。想象一下，Z 的总数是 z，同样也是 X 的 Z 的数量是 x，同样也是 Y 的 Z 的数量是 y。在上面所举的例子中，如果总人数是 100（$z=100$），其中有 57 人吃面包（$x=57$），并且有 69 人吃苹果（$y=69$）。这时，德摩根注意到，一定至少有（$x+y-z$）的 X 同样也是 Y，也就是说，至少有 26 人

（57+69-100=26）既吃苹果也吃面包。

不幸的是，这种十分巧妙的量化预测方法却反而使德摩根陷入了一系列令人不快的非议和争吵中。苏格兰哲学家威廉·哈密顿（William Hamilton，1788—1856）——请不要与爱尔兰数学家威廉·罗恩·哈密顿（William Rowan Hamilton）混为一谈了——就公开指责德摩根剽窃了他的成果，因为哈密顿在德摩根发表其文章几年前就已经出版了相关问题的专题著作，其中的某些思想与德摩根非常相似，只不过没有德摩根那么精确。哈密顿对待数学和数学家的态度一贯如此，因此他的指责不足为奇。哈密顿曾经说过："过度地研究数学绝对会使哲学和人生必需的思维活力丧失。"他在给朋友的许多信中，写下了一系列言辞尖酸刻薄的指责，如果说这些话有什么正面效应的话，那就是，在不知不觉间促使代数学家乔治·布尔转而开始研究逻辑。布尔在他后来的《逻辑的数学分析》（*The Mathematical Analysis of Logic*）[203]一书中详细描述了这一转折过程：

> 在那年的春天，我逐渐开始关注哈密顿爵士与德摩根教授之间的争论。我被他们争论的问题所吸引，并且开始有兴趣重拾一些几乎已忘掉的线索来解答以前的疑问。对我而言，尽管逻辑与量化思想有关，但是它还有一种更深的关系系统。如果通过数学这种媒介，从外部把逻辑本身与人类对时间和空间的直觉联系起来是合理的话，那么认为逻辑是从内部建立在另外一种秩序事实基础之上也是合理的，而这些事实在思维构建过程中有它们的固有位置。

这段十分谦逊的文字描写了在符号逻辑中开始对后世有巨大影响力的思想。

思维的法则

1815年11月2日乔治·布尔（图7-1）出生于英国伦敦附近的一座工业小镇上[204]。他的父亲约翰·布尔（John Boole）虽然只是伦敦的一位制鞋者，但却酷爱数学，并且能熟练制作各种各样的光学仪器。布尔的母亲玛丽·安·乔伊斯（Marry Ann Joyce）是一位贵妇人的贴身女侍。由于老布尔的心思完全不在制鞋生意上，所以家庭的经济条件并不十分宽裕。布尔在7岁之前一直在一所商业学校上学，之后他被送入了一所小学学习，在那里他的老师是约翰·沃尔特·里维斯（John Walter Reeves）。布尔还十分年幼时就喜欢上了拉丁语，他从一位书商那里接受了不少指导。他还对希腊语有深厚的兴趣，不过这就完全是他自学的了。14岁时他就开始试着把公元前1世纪的一位希腊诗人墨勒阿格（Meleager）的一首诗作翻译为英文。乔治的父亲对此也感到十分自豪，并把它发表在了《林肯先驱报》（*Lincoln Herald*）报上，这件事引起了当地一位学校老师的怀疑，并为此还专门写了一篇置疑的文章。由于家庭条件拮据，乔治·布尔在16岁时就不得不设法自己谋生，他通过努力成为了一名助理教师。在此之后的几年里，他把自己的所有业余时间都用来学习语言，他自学了法语、德语和意大利语。这些现代语言学的知识后来被证明是十分有价值的，由于布尔在语言上的天赋，他可以直接阅读西尔威斯特（Sylvestre Lacroix）、拉普拉斯、拉格朗日、雅各宾等著名数学家的原著。然而，布尔始终没有机会接受正规的数学教育和专业训练，但他却坚持不懈地自学，同时还用自己在教学工作中获得的微薄薪水帮助他的父母和兄弟姐妹。生活的重担并没有使布尔放弃对数学的追求，很快他就凭借数学天才崭露头角，在《剑桥数学杂志》这样顶尖的学术刊物上发表文章。

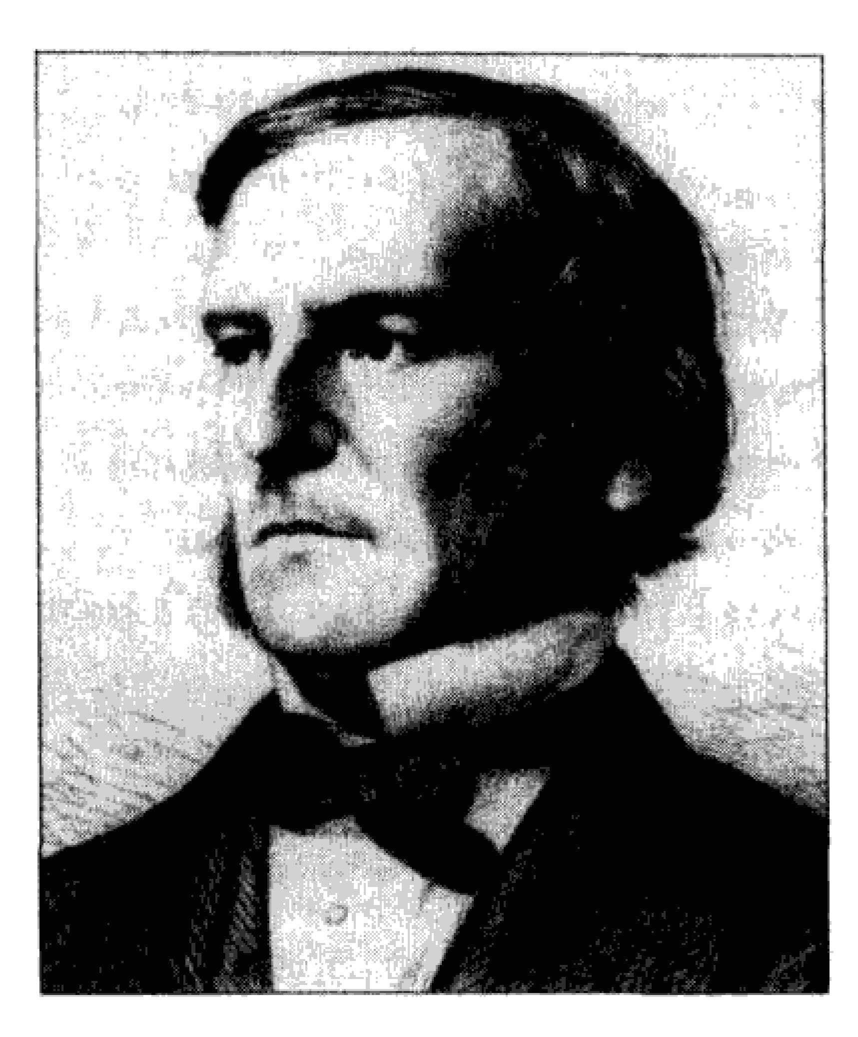


图　7-1

在 1842 年，布尔开始与德摩根定期通信，并把自己的一些数学论文寄给德摩根，希望得到他的指导和意见，这些文章得到了德摩根的高度评价。此后，作为一位富有创见的数学家，布尔名声鹊起，在德摩根的强烈推荐下，布尔在 1849 年成为爱尔兰皇后学院的数学教授（那年他 34 岁），在此后的岁月里，他一直从事教学工作。在 1855 年，布尔与玛丽·埃佛勒斯（Mary Everest）结为夫妻。玛丽的叔叔乔治·埃佛勒斯是一位测量员，正是他第一次测量了珠穆朗玛峰的高度，也因此珠穆朗玛峰被命名为 Everest。不幸的是，布尔 49 岁时就英年早逝了。在 1864 年寒冷的冬季的一天，布尔在去往学院的路上淋湿了，但他依然坚持上完了自己的课程，结果他得了伤风。回到家之后，由于受到迷信思想的影响，认为重复病因会治愈疾病，他的妻子把几桶水倒在了床上，这使他的情况变得更加糟糕，布尔的病迅速发展为肺炎，并于 1864 年 12 月 8 日因病不治离开了人世。伯特兰·罗素毫不掩饰地表达了他对布尔自学

精神和能力的崇敬之情，他评价道："理论数学是被布尔发现的，他的那本《思维的法则》（*The Laws of Thought*，1854年出版）虽然从本质上讲是一本关于形式逻辑的著作，但同时也是一本研究数学的不可多得的佳作。"引人瞩目的是，在当时，他的妻子玛丽·布尔（Mary Boole，1832—1916）和他们的5位女儿在各自的领域内（包括教育和化学研究等）都取得了丰硕的成就，并赢得了广泛的赞誉。

布尔在1847年出版了《逻辑的数学分析》，之后在1854年又出版了《思维的法则》（这本书的书名很长，全称为《建立在逻辑和概率的数学理论基础之上的关于思维法则的研究》），它们都是天才的杰作。布尔是第一个对逻辑和算术运算进行类比，并取得了巨大进展的人。布尔基本上是逐字逐句地把逻辑"翻译"为一种代数的语言（后来被称为布尔代数），并把逻辑分析扩展到了概率推理中。按照布尔的话说[205]：

> 我写《思维的法则》这本书是为了研究人类思维活动的基础法则，利用这些思维法则，人类才能进行推理；是为了用一种演算的符号语言表示它们，并在此基础上建立逻辑的科学及其方法；是为了让这种方法本身成为应用概率论的通用方法；并且最终从这些探索所发现的各种真理中，搜寻到一些有关人类思维禀性和形成过程的暗示。

布尔的演算既可以理解为在类（成员和对象的集合）中应用关系，也可以用命题中的逻辑来解释。例如，如果 x 和 y 是不同的类，那么，要是存在诸如 $x=y$ 的关系，这就意味着这两个类有完全一样的成员，即使这两种类的定义完全不同也是如此。让我在这里用一个具体的例子说明：假设有一所学校，学校中所有学生的身高都不足7英尺，那么此时就可以定义两个类，$x=$"学校中的所有的学生"和 $y=$"在学校里所有身高不足7英尺的学生"，这两个类是完全等价的。如果我们用 x、y 代

表命题的话，那么 $x=y$ 则表示这两个命题是等价的，换句话说，只有其中一个正确，另一个才是正确的。例如，命题 $x=$ “约翰·巴里莫尔是埃赛尔·巴里莫尔的弟弟”，命题 $y=$ “埃赛尔·巴里莫尔是约翰·巴里莫尔的姐姐”，这两个命题就是完全等价的命题。符号“$x \cdot y$”代表 x 和 y 这两个类的共同部分（也就是既属于 x，同时又属于 y 的成员），即命题 x 与命题 y 的合取（counjunction，即“x 和 y”）。例如，x 是指村子里所有的傻瓜的类，y 是指所有长着黑毛发的物种的类，那么 $x \cdot y$ 就是指所有长着黑头发的傻瓜这个类。对于命题 x、y 来说，复合命题 $x \cdot y$ 则是指两个命题都成立。例如机动车辆管理人员说：“你必须通过视力测试和驾驶测试。”这就意味着你必须要同时满足两项测试的要求，才能顺利拿到驾驶执照。在布尔看来，对于没有公共部分的两个类，符号“$x+y$”代表由类 x 的所有成员和类 y 的所有成员共同组成的一个类。而对命题 x、y 来讲，“$x+y$”相当于“要么是 x，要么是 y，但不是同时满足二者”。例如，如果命题 x 是“桩是正方形的”，命题 y 是“桩是圆形的”，那么 $x+y$ 表示“要么是正方形的桩，要么是圆形的桩”。同样的道理，“$x-y$”代表着类的成员属于 x，但是却不属于 y，即命题“是 x 但不是 y”。布尔用 1 表示那种普适（通用）的类（包含讨论中所有可能的成员），用 0 代表空（没有一个成员）的类。请注意，这里的空类（或集合）绝对不是指数字 0——数字 0 只是空类中的一员。还需要注意的是，空类并不等同于无，因为一个什么都没有的类仍然是类。例如，如果所有的阿尔巴尼亚的报纸使用的都是阿尔巴尼亚语言文字，那么在布尔的概念体系中，在阿尔巴尼亚这个国家中，所有使用阿尔巴尼亚语言报纸的类可以用 1 来表示，而所有西班牙语报纸的类则可以用 0 来表示。对于命题而言，1 代表标准的真（例如人都是会死的），0 代表标准的假（例如人是永生不死的）。

利用上述的规则，布尔系统地阐述了一套定义逻辑代数的公理。例

如，你可以用上面的定义方式，把显而易见的真命题“要么是 x 的，要么不是 x 的”用布尔代数表示为 $x+(1-x)=1$，这个算式在一般代数中也是正确的。同样的道理，任何类与空类之间的公共部分都是一个空类，这可以用 $0\cdot x=0$ 来表述，这也同样意味着任何命题（不论它是真是假）与一个假命题的合取都是假。例如“糖是甜的和人是永生不死的”产生的是一个假命题，虽然前半部分是正确的。需要再次提醒的是，这种布尔代数“等式”代入代数数字时同样有效。

为了展示他的这种方法的效力，布尔试图利用他提出的逻辑符号表示他认为重要的所有事物，例如，他甚至分析了哲学家塞缪尔·克拉克（Samuel Clarke）与巴鲁克·斯宾诺莎（Baruch Spinoza）之间关于上帝是否存在和上帝有什么特征的辩论。然而，布尔得出的结论却比较悲观：“我认为，首先必须坚信完全靠推理无法证明上帝及其特征、他与世间万物的关系是否存在，否则就不能从克拉克和斯宾诺莎的辩论中得出结论。”虽然布尔结论中有正确的部分，不过很明显，不是所有人都认识到我们无法靠推理证明上帝及其特征、他与世间万物的关系是否存在，因为甚至在今天，证实上帝是否存在这样的属于本体论范畴的有关争论仍然不绝于耳[206]。

从总体而言，布尔试图用数学的方式表达逻辑连接词*和*、*或者*、*如果……那么……*以及*不*，这些连接词是今天计算机程序运算和开关电路的核心。因此，布尔被许多人认为是“预言家”，正是他把人类引入了数字时代。尽管如此，由于这是一项开拓性的研究工作，布尔代数在他那个时代还远称不上完善。首先，布尔的著作有点含糊不清，并且由于他的符号表示法与一般代数太过于接近了，因此这也使得他的概念体系有点难以理解；其次，布尔混淆了命题（例如“亚里士多德是不朽的”）、命题函数或谓词（例如“x 是不朽的”）和量化陈述（例如“对所有的 x，x 是不朽的”）之间的区别。弗雷格和罗素后来都认为代数源自于逻辑，人们由此认为，以逻辑为基础构建代数比反过来说更合理。

除此之外，布尔还在逻辑学的其他方面作出了重要的贡献。比如，他认识到了逻辑与类（或集合）的概念之间的关系是非常紧密的。回想一下，我们在前面曾经提到过，布尔代数在类中应用时和在逻辑命题中应用时几乎是完全相同的。事实上，如果集合 X 中的所有成员也是集合 Y 的成员（X 是 Y 的子集），这完全可以用一条逻辑蕴涵“如果是 X，那么就是 Y”来表达。举个例子，所有的马构成的集合是所有的四条腿动物构成的集合的子集，这一事实可以被重写为：“如果 X 是一匹马，那么它一定是四条腿的动物。”

布尔的逻辑代数在后来被许多研究者进一步拓展和完善，其中有一个人充分利用了集合和逻辑之间的相似性，从整体上把布尔代数推向一个新高峰，这个人就是戈特洛布·弗雷格（Gottlob Frege，图 7-2）。

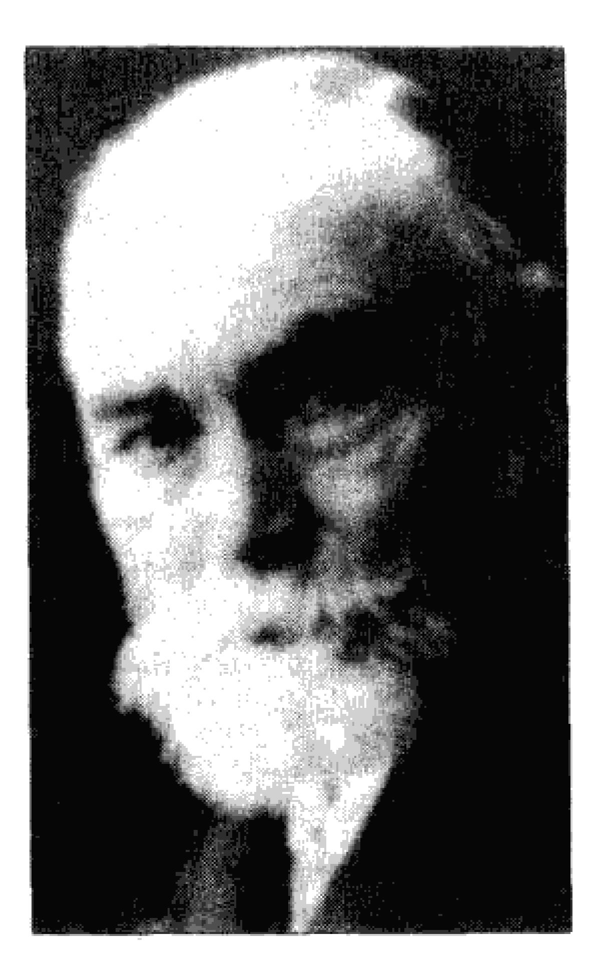


图　7-2

弗里德里希·路德维格·戈特洛布·弗雷格（Friedrich Ludwig Gottlob Frege）出生于德国的维斯玛（德国西北部的一个港口城市），他

的父亲也出生在那里，他的母亲曾担任过女子中学的校长。弗雷格先在耶拿大学学习数学、物理学、哲学和化学，毕业后又继续在哥廷根大学进修了两年。在完成学业之后，大约在1874年左右他又回到了耶拿大学，在那里开始了他一生的教学生涯，一直教授数学。在繁重的教学工作之余，1879年他还在耶拿大学出版了他的第一部关于逻辑的划时代的著作，这本书的书名很长，全称为《概念脚本：仿效算术方法的纯理论思考的一种形式语言》（*Concept-Script, A Formal Language for Pure Thought Modeled on that of Arithmetic*）[207]，事实上这本书更为人们所熟知的是它的另外一个名字 *Begriffsschrift*。在这本书中，弗雷格开发出了一种原始的逻辑语言，他后来又将该书扩展为两卷本的《数学的基本法则》（*Basic Laws of Arithmetic*）[208]。弗雷格的逻辑规划一方面重点突出，但另一方面却又显得极端模糊。虽然他主要关注的是算术，不过他仍然想证明，即使是我们最为熟悉的、诸如1,2,3,4…这样的自然数，也能被简化为逻辑的结构。因此弗雷格相信我们能从一些逻辑的公理中证明所有的算术真理。换句话说，根据弗雷格的观点，即使是 $1+1=2$ 这类的算术表达式，也不是以观察为基础的经验主义的真理，而是从一系列逻辑公理推导得出的结论。弗雷格的 *Begriffsschrift* 一书影响十分深远，和他同时代的逻辑学家威拉德·范·奥曼·奎因（Willard Van Orman Quine，1908—2000）曾经评价道："逻辑是一个古老的话题，但是自从1879年之后，它就变成了一门真正的科学。"

弗雷格哲学思想的核心是，真理是独立于人类判断之外的。他在《数学的基本法则》中写道："'正确'与'认为是正确'完全不同，不管它是被一个人认为是正确，还是被很多人认为是正确，甚至是被所有人认为是正确，那也不能等同于是正确的。某些事物是正确的，而所有人都认为它们是错误的，这两者之间并不存在任何矛盾。我认为'逻辑的法则'的含义不是心理学上'认为是正确的'那些法则，而是真理法则……

真理法则是永恒的界石，我们的思考可能会超越它们，但是永远也不会取代它们。”

弗雷格的逻辑公理通常以“对于所有……如果……那么……”的形式出现[209]。例如，弗雷格曾经提出一条逻辑公理：“对于所有的 P，如果不是（非 P），那么是 P。”这条公理主要是想说明，如果一个命题与另外一个命题是矛盾的，而且后一个命题是错误的，那么前一个命题就是正确的。举例说，如果“不用必须在一个停车标识前停车”是不正确的，那么绝对应当在停车标识前停车。为了真正发展出一门逻辑的“语言”，弗雷格为公理集补充了一条重要的新特征。他借用数学函数理论的概念替换了传统使用的，经典逻辑的“对象/谓词”模式。这里让我简要地解释一下：当我们写下一个数学表达式，比如 $f(x)=3x+1$，这个表达式表示 f 是以 x 为变量的函数，并且该函数的值是变量 x 的值乘以 3 后再增加 1。弗雷格把他所谓的概念定义为函数。举个简单的例子，假如你想讨论“食肉”的概念。这一概念可以符号性地用函数“$F(x)$”来表示，并且如果 x=“狮子”的话，这个函数的值为“真”；如果 x=“鹿”的话，这个函数的值为“假”。同样的道理，考虑数字时，概念（函数）“小于 7”，表明每一个等于或大于 7 的数字为“假”，与此同时，所有小于 7 的数字则为“真”。弗雷格认为，若对象在概念中的值为“真”，那么这个对象“属于”这种概念。

正如我在上面指出的，弗雷格坚定地相信每一个与自然数有关的命题都是可知的，并且完全是由逻辑定义和法则推导得出的。基于这种认识，他试图不求助于在他之前的任何关于“数字”的理解，对自然数进行全面的阐述和分析。例如，在弗雷格的逻辑语言体系中，如果“属于一种概念的对象”与“属于另一种概念的对象”两者之间是一一对应的话，那么这两个概念就是“数量相等的”（equinumerous），也就是说与这两个概念相关联的数字彼此相等。比如，垃圾桶盖子与垃圾桶本身的数量是相等的（如果每个垃圾桶都有一个盖子），并且这种定义不需要涉及任何数字。接着，

弗雷格又针对数字 0 引入了一种构思巧妙的逻辑定义。想象一下，有一个概念 F 被定义为“不存在与它自己完全一样的（概念）”。因为每一个对象都必然与它自己完全相同，所以说没有一个对象属于 F，那么对于任何对象 x，$F(x)$=假。弗雷格定义了数字 0 是“概念 F 的数字”。之后，弗雷格继续以他称为“外延”的角度定义了所有的自然数字[210]。概念的外延是属于这一概念的所有对象的类。虽然这种定义也许很难被专业逻辑学家之外的人理解，但它实际上却非常简单。例如，概念“女人”的外延，是所有女人的类。注意，“女人”的外延绝不是指某一位特定的女士。

你也许会对弗雷格提出的这种抽象的逻辑定义方式心存疑虑，比如，他的这种思想如何帮助我们定义数字“4”？根据弗雷格的方法，数字 4 是所有含有 4 个对象的概念的外延（也叫类）。因此，概念“名叫史努比的狗的一条腿”属于这个类（当然也属于数字 4），概念“戈特洛布·弗雷格的（外）祖父（母）”也是如此。

弗雷格程序同样非同寻常，令人印象深刻，但是它也存在一些严重缺陷。概念是人类思考不可或缺的，犹如面包和黄油之于人类，在应用概念构建数学方面，弗雷格绝对可以称得上天才。但是，遗憾的是弗雷格没有发现在他的形式论方法中有一些关键的自相矛盾之处，特别是他提出的一条公理（通常被称为第五基本定律）存在致命缺陷。

这条定律的陈述本身并没有错误，它讲的是如果 F 和 G 有相同的对象，并且 F 和 G 仅有这些对象，那么，概念 F 的外延与概念 G 的外延完全相同。1902 年 6 月 16 日，一枚炸弹从天而降。伯特兰·罗素（图 7-3）给弗雷格写了一封信，向他指出了一个确定无疑的悖论，它表明第五基本定律是矛盾的。就好像是命运的安排，罗素的信送到弗雷格手中时，正好是他的《数学的基本法则》第二卷出版的前夕，当看到罗素指出的问题后，弗雷格感到极为震惊，他匆匆忙忙地在手稿中增加了一段内容，在这段文字里他坦诚地承认：“一位科学家所能遇到的最令人不快的事，

莫过于在他自以为行将大功告成时，却突然发现他的研究基础整个地坍塌了，而我正是这样的例子。我的书几乎就要出版了，但伯特兰·罗素的一封信将我置于了这种痛苦的境地。”在给罗素的回信中，弗雷格表现出一种大师特有的谦逊，他写道：“你发现的悖论让我极其惊讶，几乎可以说让我惊慌失措，因为它动摇了我想要建立的数学基础。”

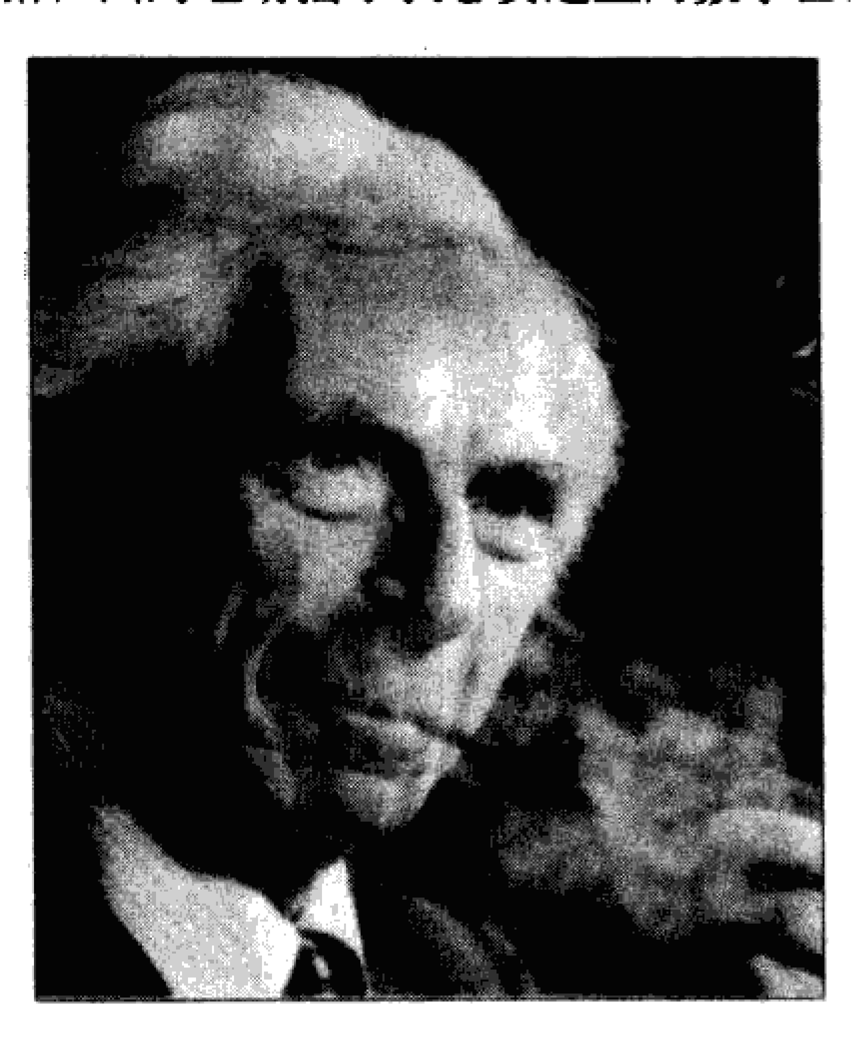


图　7-3

在构建数学基本原理的整个过程中，仅仅一个自相矛盾的例子就给全部理论体系带来了破坏性影响，这个事实乍一听似乎有点不可思议，但正如哈佛大学逻辑学家奎因指出的：“在历史上这种现象不止一次地出现过：自相矛盾的发现实际上是为思想体系基础的重要重建提供了一个机会。”罗素提出的悖论恰恰提供了这个机会。

罗素的悖论

从今天来看，德国数学家乔治·康托尔独立构建了数学集合理论。

在这之后，集合（或类）迅速成为极为有用的基础性理论，并且与逻辑密切相关，任何试图在逻辑研究基础上建立的理论，都被认为是以集合理论的公理为基础的。

通俗地说，集合或类不过是对象集，而且这些对象之间不一定必须有联系。你可以把以下这些项目聚在一起当做一个类：2003 年播放的肥皂剧、拿破仑的白马和真爱的定义。类包含的具体元素被称为这个类的成员。

你能想出的绝大多数对象的类并不是它们自己的成员。例如，所有雪花的类并不是指一片雪花，所有的古董手表这个类也不是指一只具体的手表。但是世事无绝对，也有一些类的确是它们自己的成员。例如，"所有不是古董手表的东西"的类就是该类自己的成员，因为这个类肯定不是一只古董手表。同样的道理，所有类组成的那个类也是这个类自己本身的成员，很明显，因为这是一个类。但是，什么是"所有不是它们自己的成员的类"的类呢[211]？让我们把这种类称为 R。那么 R 是不是它自己（R 的）类呢？很显然，R 不属于 R。因为如果它是的话，那么这就违背了 R 项的定义。但是如果 R 不属于它自己的话，那么根据定义，R 一定是 R 的类。这与乡村理发师的处境又一样了。我们发现类 R 既属于 R，但同时又不属于 R，这是一个逻辑矛盾。这就是罗素在给弗雷格的信中所提到的那个悖论。这个自相矛盾的命题，在根本上动摇了定义类或集合的整个过程，这对弗雷格理论的一致性是一个巨大的打击。尽管弗雷格想尽一切办法来纠正他的公理体系，但不幸的是，他没有成功。最终的结论看起来似乎是灾难性的：形式逻辑并不比数学更稳固，反而更脆弱。

几乎就在弗雷格发展他的逻辑学的同时，意大利数学家和逻辑学家约瑟夫·佩亚诺也在尝试从另一个角度来解决这个问题。佩亚诺想在公理基础上建立算术。因此，他以一个简洁的公理集作为他系统阐述的起点。例如，佩亚诺理论的前 3 条公理是：

(1) 0 是一个数字；

(2) 任何一个数字后续的也是一个数字；

(3) 任何两个数字都不会有相同的后续数字。

这里有一个问题，虽然佩亚诺的公理体系的确能再现已知的数学规律（当引入其他定义之后），但是通过佩亚诺的理论，仍然无法识别自然数。

接下来的步骤是由罗素完成的。罗素坚持认为弗雷格最初的思想——数学源自于逻辑——仍然是正确的。为了解决这一难题，罗素与艾尔弗雷德·诺思·怀特黑德（图 7-4，怀特黑德也是一位伟大的逻辑学大师）合作撰写了三卷本的《数学原理》（*Principia Mathematica*）[212]，这是一本在历史上具有里程碑意义的著作，也是继亚里士多德《工具论》（*Organon*）之后，人类逻辑学研究史上最有影响力的著作（图 7-5 展示的是这本书第一版的封面）。

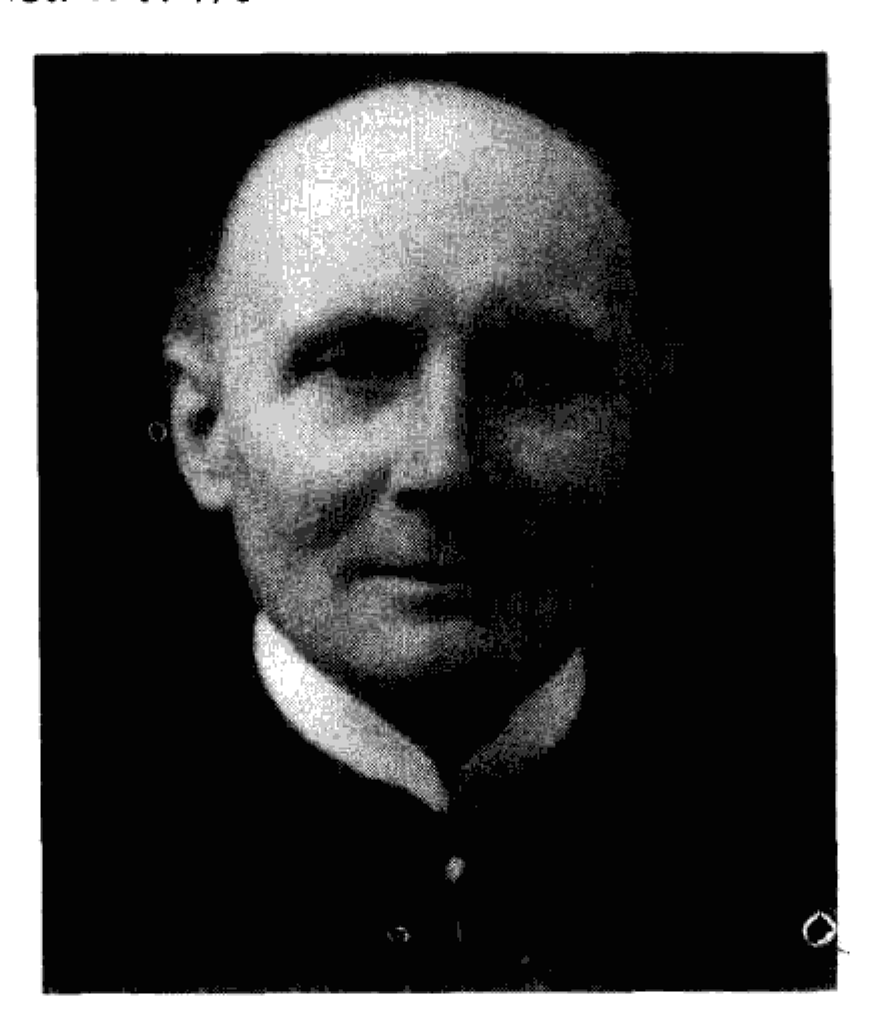
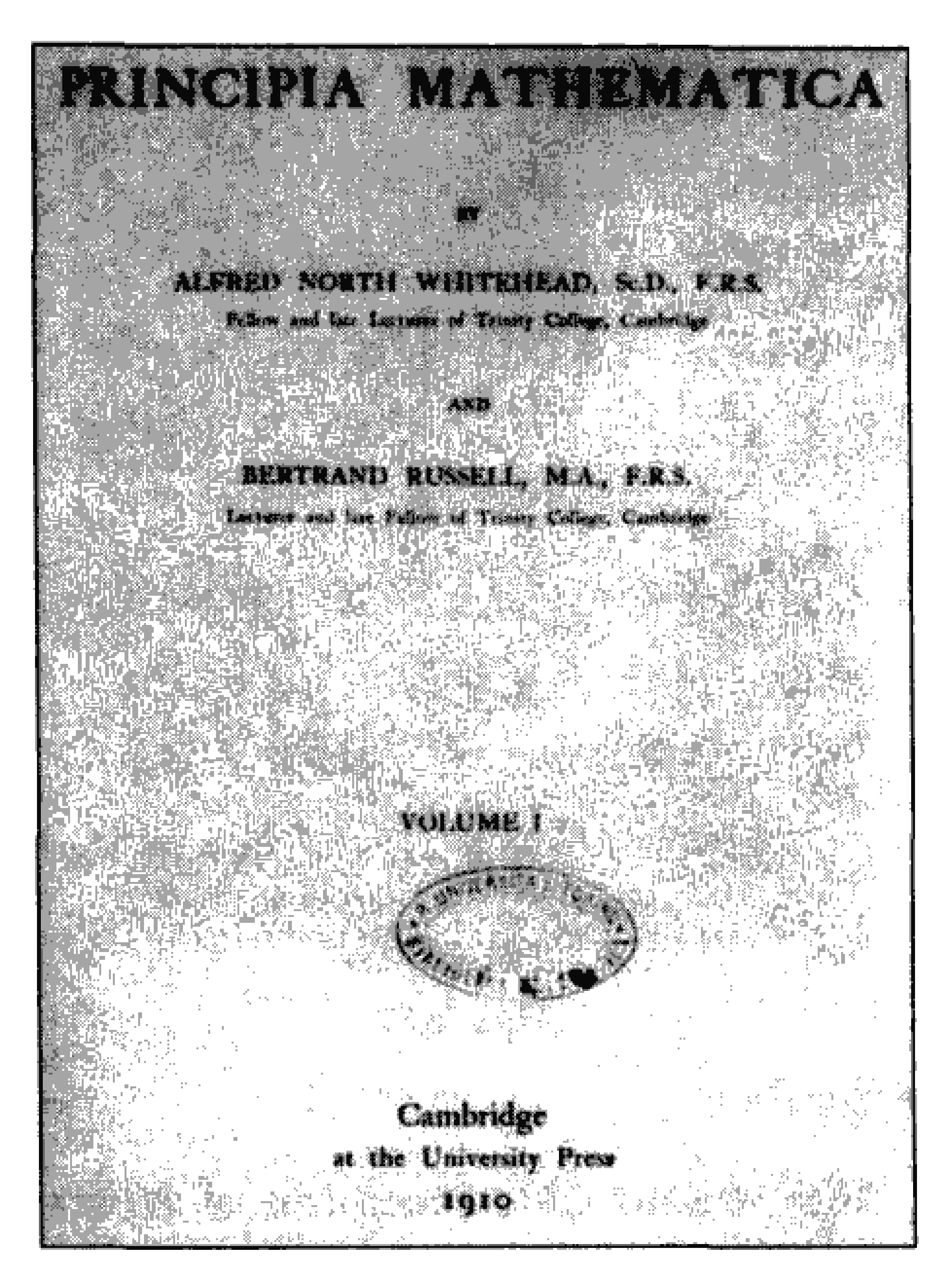


图　7-4



PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

图 7-5

在《数学原理》中，罗素和怀特黑德为数学本质上是逻辑规律的具体说明这一观点进行了分析辩护，并且认为两者之间并无明显界限[213]。然而，为了给出一致的描述，他们还是不得不使用了一些悖论来说明（除了罗素向弗雷格提出的那条悖论之外）。这需要高超的逻辑分析技巧。罗素坚持认为那些悖论的出现只是因为一个“恶性循环”，在这个循环中，人们从客体的类的角度来定义实体，而这些客体本身却包含了已定义的实体。按罗素自己的话来讲：“如果我说‘拿破仑具有成为一个伟人所必须具备的一切品质’，那么我必须用不包括我现在正在说的这种方式来定义‘品质’这个词，也就是说‘具备使其成为一位伟人的所有品质’本身绝不是这样的一个品质。”

为了避免出现类似的悖论，罗素提出了一种类型理论（theory of types）[214]。该理论认为类或集合与属于它们的成员相比，属于一种更高层次的逻辑类型。例如，所有单个的达拉斯小牛队橄榄球运动员是类型 0，那么达拉斯小牛队（它是运动员的一个类）将会是类型 1，而全美橄榄球联盟（它是球队的一个类）则是类型 2。依次类推，联盟的集合（如果它存在的话，就是联盟的一个类）是类型 3，等等。在这个方法中，"一个类，是它自身的成员"这种提法既不是真命题，也不是假命题，它毫无意义。因此，罗素提出的那种悖论根本不能可出现。

毫无疑问，《数学原理》是逻辑学中的一座不朽的丰碑，但是它却不是人们一直苦苦寻找的数学基础。罗素的类型理论也被很多人看做是对悖论问题的人工补救[215]，另外，它还产生了其他一些令人不安的复杂结果。例如，按罗素的类型理论，有理数（简单分数）将变为比自然数更高级的类型。为了回避类似的难题，罗素和怀特黑德引入了另外一个公理，也就是我们所称的可约性公理，不幸的是，这一公理又引发了新的论战和怀疑。

最终，数学家恩斯特·策梅洛（Ernst Zermeleo）和亚伯拉罕·弗兰克尔（Abraham Fraenkel）提出了一种更加巧妙的方式来消除这类悖论。事实上，他们使集合理论一致性公理化了，并再现了集合理论的大部分结论。这从表面上看至少是柏拉图主义者们梦想的部分实现。如果集合理论和逻辑是同一枚硬币的两个不同的面（同一事实因认识角度不同而得出的不同认识），那么集合理论的稳定基础同样也意味着逻辑的坚实根基。另外，如果大多数数学理论的确是从逻辑学中得出的，那么这为数学提供了客观的确定性，这同时可以用来解释数学的有效性。然而，柏拉图主义者的欢呼并没有持续很长时间，因为不久之后，他们就受到一个糟糕的似曾相识症的打击。

类似非欧几何的危机再次重演了吗

1908年，德国数学家恩斯特·策梅洛[216]（1871—1953）还在沿着最初由欧几里得在公元前300年左右奠定的理论道路前进。欧几里得系统阐述了几个未经证实、却历来被认为是不言自明的关于点、线的公理性假设，并以这些公理为基础构建了欧几里得几何学。策梅洛早在1900年就独立发现了罗素的悖论，他提出了一种建立以相应公理为基础的集合理论的方法。在他的理论中，通过仔细选择原则，可以消除诸如“所有集合的集合”的矛盾理论，这样，罗素的悖论就会被绕了过去。1922年以色列数学家亚伯拉罕·弗兰克尔（1891—1965）进一步完善了策梅洛的理论，最终形成了策梅洛-弗兰克尔[217]集合理论，这一理论在1925年又被约翰·冯·诺依曼（John Von Neumann）作了比较重大的修改和补充。至此，集合理论似乎已经臻于完美（其一致性已经得到很好的证明），那些烦人的怀疑和批评逐渐平息并完全销声匿迹。然而，有一条公理[218]（即选择公理），正如欧几里得几何中著名的“第五公理”给许多数学家心中留下了抹不去的伤痛，它也引起了数学家的不安。简单地说，选择公理讲的是：如果X是非空集合的集合，那么我们可以从X中的每个集合中选择一个元素形成一个新的集合 Y。你可以很轻松地证明，只要集合X不是无限的，那么这一表达就是真的。例如，如果我们有100个盒子，每一个盒子都至少有一个小球，那么我们可以非常简单地从所有盒子中都取出一个小球，这样就形成了一个新的集合 Y，这个集合中包含有100个小球。在这种情况下，并不需要一条特定的公理，我们就可以证明选择是可能的。并且只要能精确地说明我们是如何作出选择的，甚至在集合X是无限时，这一表达依然是正确的。想象一下，有一个无限的非空自然数的集合。这集合的成员可能是诸如{2,6,7}，{1,0}，{346,5,11,1257}，{384到10 457之间的所有自然数}这样的自然数组成

的集合。在所有这些自然数集合中，总会有一个最小的数字。那么，可以用以下这种方式唯一地描述选择：从每一个集合中，挑选出最小的那个元素。在上述这个例子中，选择公理的需要被巧妙地回避了。而在那些我们无法确定选择的例子里，无限集合带来的问题就会凸现出来。此时，选择的过程将永远不会终止，并且从集合 X 中的每一个元素（此时的元素代表着集合）里选择一个元素组成一个新的集合，这个集合是否真实存在就变成信仰问题了。

从一开始，选择公理就在数学家中有巨大的争议。公理断言了特定数学对象（例如选择）的存在性，而没有提供具体的、确凿的例子，不过很显然，这一点正是该公理最为人们所诟病之处，特别是那些继承了经院派构成主义[constructivism，它与直觉主义（intuitionism）相关]思想的人。构成主义论者坚持认为任何存在的事物同样应当是可明确构成的。其他一些数学家也同样倾向于回避选择公理，并且只使用策梅洛-弗兰克尔集合理论中的其他几条公理。

由于意识到了选择公理的缺陷，数学家们开始怀疑是否可以用其他公理来证明某条公理的正确性，或者用别的公理来证伪。欧几里得第五公理的历史实际上在不断重复。最终，直到 20 世纪 30 年代后期，库尔特·哥德尔（Kurt Gödel，1906—1978）对这一问题给出了部分解答。哥德尔被认为是人类历史上最有影响力的逻辑学家之一，他证明了选择公理，以及集合理论创始人乔治·康托尔提出的另外一条著名的猜想——连续统假设（continuum hypothesis）[219]，这两条假设与策梅洛-弗兰克尔集合理论的其他公理相一致。也就是说，这两条假设中的任意一条都不能用其他标准的集合理论的公理来证伪。在 1963 年，美国数学家保罗·科恩（Paul Cohen，1934—2007，就在本书写作期间，他不幸离我们而去，这让我感到极为悲痛）给出了建立完整的、自主的选择公理和连续统假设[220]的其他证明。换句话说，选择公理既不能被集合理论的其他

公理证明，也不能被它们证伪。同样，连续统假设也是既不能被那些公理集证明，同时又无法被它们所否认，即使这一公理集包括了选择公理也是如此。

逻辑学的这些发展给哲学研究带来了戏剧性的结果。正如 19 世纪的非欧几何一样，并不仅仅只有一种确定的集合理论，而是至少有 4 种！我们可以对无限的集合作出不同的假设，最后以相互排斥的集合理论而告终。例如，可以假设选择公理和连续统假设都是有效的，这样便可以得出一套版本；或者假设它们都是不正确的，这样又会得出另外一套完全不同的理论。同样，可以假设两条公理中的某一条是正确的，而另外一条是错误的，这样又会产生两种不同的集合理论。

这是不是有点像非欧几何危机的再现？事实上，甚至比那还要糟糕：集合理论的基本作用可能是整个数学的基础！对于柏拉图主义者而言，这个问题会变得更加尖锐。如果说一个人的确可以通过选择不同的公理集而形成许多套集合理论，那这不就是说数学只不过是人类的发明？形式主义论者看来几乎胜利了。

不完全的真理

弗雷格非常关注公理的含义，但形式主义最主要的支持者，著名的德国数学家大卫·希尔伯特（David Hilbert，如图 7-6 所示）则提倡完全回避对数学公式的任何解读及阐释。希尔伯特对于数学是否源自于逻辑之类的问题丝毫不感兴趣。从严格意义上讲，对他而言数学就是一些毫无意义的公式，而公式也就是由任意符号组成的结构[221]。希尔伯特将确定数学基础的研究归入了另外一门全新的学科，他称之为“元数学”。在希尔伯特看来，元数学研究的是，恰恰利用数学分析的方法来证明由形式系统调用的整个过程，即按照严格的推理规则从公理推导出定理的过程，是否前后一致。如果从不同的角度分析，希尔伯特认为他能从数学

上证明数学是有用的，按他本人的话说[222]：

> 我对数学新基础所作的所有研究只有一个目的，那就是一劳永逸地消除对数学推理可靠性的怀疑……我将把过去那些被认为组成了数学的所有内容，都严格地进行形式化处理。这样，真正的数学，或者说严格意义上的数学，就将成为公式的积累了。除了这种形式化的、严格意义上的数学以外，我们还有一类全新的数学：元数学，这是保证数学可靠性所必需的。与理论数学中的推理方式相反，在元数学中，通过上下文的语境推理，只能证明公理的一致性……因此，数学这门学科作为一个整体在两个方面交替地发展：一方面我们通过形式推理从公理中得到可验证的公式；另一方面，我们又通过应用语境推理增加新的公理，同时证明它们的一致性。

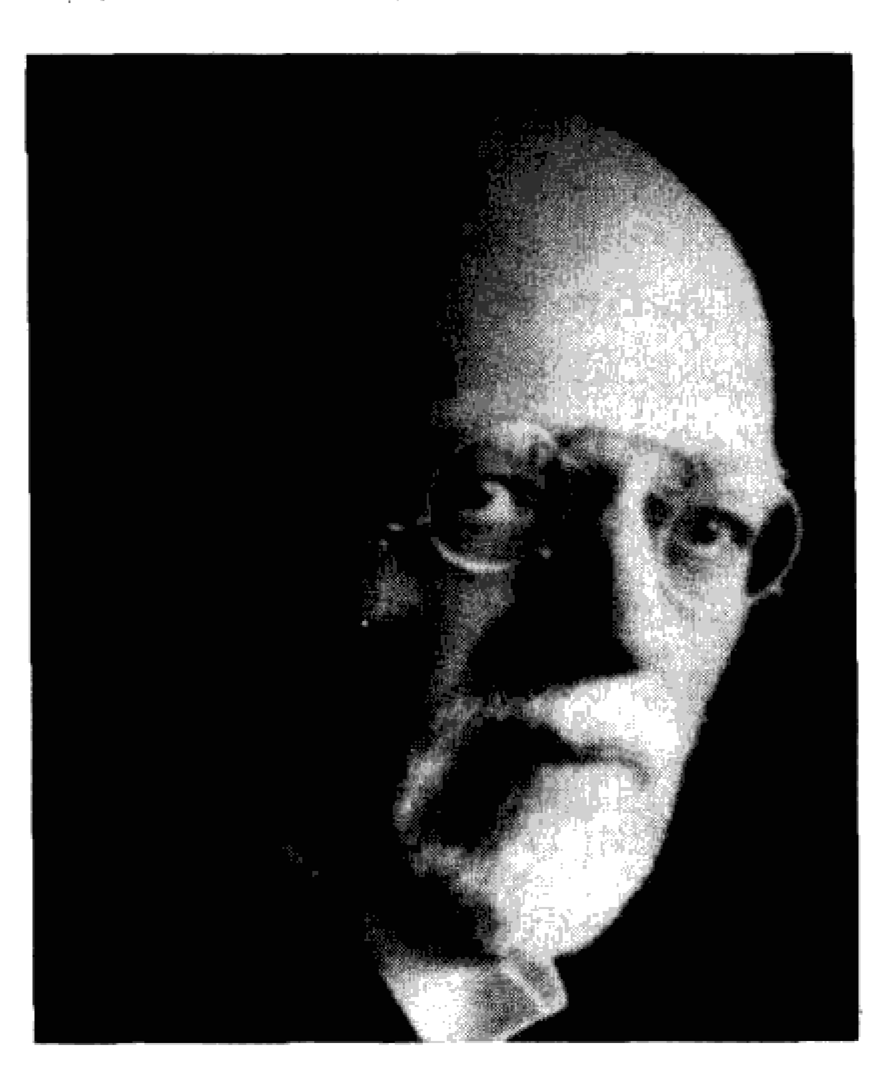


图 7-6

为了探寻根本，希尔伯特的计划表牺牲了内涵。因此，对于他的形式主义论[223]思想的追随者而言，数学的确只是一场游戏，但是希尔伯特的目标是，严格地证明这是一个完全可以自圆其说的游戏。基于他在公理中的所有进展，实现这种形式主义论者“证明论”的梦想看起来仅仅只是几步之遥了。

然而，并非所有人都认为希尔伯特所走的道路是正确的。路德维格·维特根斯坦（Ludwig Wittgenstein，1889—1951）[224]，被认为是20世纪最伟大的哲学家，他就认为希尔伯特关于元数学的研究是在浪费时间。维特根斯坦曾经评价道：“我们不能为了一条规则的应用而制订另外一条新的规则。”换句话说，维特根斯坦不相信通过创造另一种“游戏”能理解现有的一种“游戏”，他说：“如果我对数学的本质并不清楚的话，任何证明都对我毫无帮助。”[225]尽管如此，年仅24岁的库尔特·哥德尔却给形式主义论的核心思想给予了重重的一击。

1906年4月28日库尔特·哥德尔（如图7-7所示）[226]出生于摩拉维亚城，这座城市后来因为捷克的布尔诺而闻名于世，在当时，这座小城是奥匈帝国的一部分。哥德尔在一个以德语为母语的家庭中长大，父亲诺道夫·哥德尔经营着一个纺织厂，父母坚持让年轻的哥德尔在数学、历史、语言和宗教等诸多方面接受广泛的教育。哥德尔十几岁的时候就对数学和哲学产生了深厚了兴趣。他18岁时进入了维也纳大学学习，在那里，他的注意力转移到了数学逻辑上。他被罗素和怀特黑德所著的《数学原理》，以及希尔伯特的理论所深深地吸引，并且选择了完全性问题作为他的学位论文的研究课题，这项研究的主要目标是从根本上确定希尔伯特所倡导的形式主义方法是否足以导出数学中所有真实的陈述。1930年，哥德尔被授予了博士学位，一年之后他就发表了“不完全性定理”（*incompleteness theorems*）[227]，这对于数学和哲学这门科学来说，都是一个巨大的冲击。

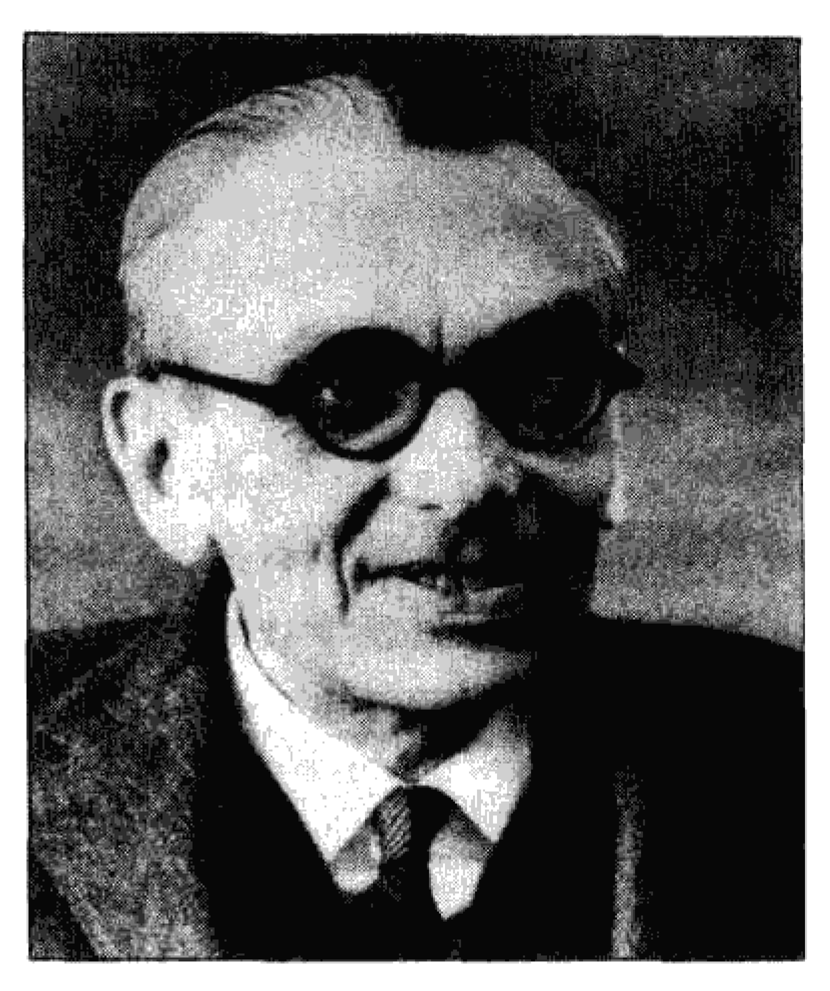


图　7-7

(1) 任何一个包含初等算术在内的形式系统 S 中，都存在一种命题，它在这个系统中既不能被证明，也不能被证伪。

(2) 任何一个包含初等算术的相容的形式系统 S 自身不能证明它本身的相容性。

这两条定理的文字看起来并没有什么恶意，但是对形式主义者的计划来讲，其影响是巨大的。简单地说，不完全性定理证明了希尔伯特的形式主义论从一开始就注定是不幸的。哥德尔的证明表明了，任何足以引起人们关注的形式体系，要么是不完全的，要么就是不一致的，这是它们内在的固有属性。这就是说，在最好的情况下，我们可以断言形式体系既不能被证实，也不能被证伪；而在最糟糕的情况下，形式体系会带来矛盾。既然对于任何陈述 T 来说，T 或不是*非* T 都一定是正确的。那么，一个有限的形式体系既不能证实，也不能证伪确定的断言，这一事实意味着永远存在这样的真实陈述，它们在这个体系中是不可证的。

换句话说，哥德尔证明了不存在由一个有限公理集和推理规则组成、在任何时候都能正确表达完整数学公理的形式系统。事实上最有可能的情况是，被人们所普遍接受的公理也只是不完全的和不矛盾的。

哥德尔本人相信独立的、数学真理形式的柏拉图世界的确存在。在1947年出版的一本著作中，他写道[228]：

> 但是，不管集合论的对象和我们的感觉经验有多么不同，我们确实能感知到它们，正如我们可以看到的，公理是作为一种正确的事物把它们自己强加给我们的。因此我看不到为什么应当相信感性知觉而不相信诸如数学直觉这类的知觉。

命运似乎和形式主义论者们开了一个玩笑，正当他们准备游行示威庆祝自己的胜利时，一个公然的柏拉图主义者库尔特·哥德尔从天而降，落到了形式主义者的流行队伍前。

著名的数学家约翰·冯·诺依曼（1903—1957）当时正在讲授希尔伯特的理论，当哥德尔发表了他的理论之后，诺依曼终止了他计划中的数学课程，并致力于研究哥德尔的发现。

哥德尔本人有点像他的定理，晦涩复杂而又严谨缜密[229]。1940年他和妻子阿黛尔从奥地利纳粹的魔掌中逃脱后来到了美国，并在新泽西的普林斯顿高级研究院获得了一个职位，在那里他与爱因斯坦成为了好友，两人经常在傍晚结伴散步。1948年哥德尔申请取得美国国籍时，爱因斯坦和当时也同样居住在普林斯顿的数学家和经济学家奥斯卡·摩根斯坦（1902—1977）陪伴他一同前去移民归化局接受面试。围绕这次面试所发生的一系列故事广为流传，这些故事的确揭示了哥德尔的性格。这里我会完整地叙述这个故事，我引用的是奥斯卡·摩根斯坦在1971年9月13日的备忘录中的记载。在此，我要特别感谢奥斯卡·摩根斯坦的遗孀多萝西·摩根斯坦女士，同时还有普林斯顿高级研究院，他们向我提供

了这封文件的副本，并允许我公开其内容[230]。

那是1946年，哥德尔马上就要取得美国国籍了。他邀请我做他的见证人，至于另外一位见证人，哥德尔邀请的是爱因斯坦，爱因斯坦十分愉快地答应了。当时，我和爱因斯坦经常见面，我们俩都对哥德尔在办理移民手续之前和办理过程中会发生什么事充满了期待。

在办理手续之前的好几个月中，我不时碰见哥德尔，他自己当然已经为此做了各种准备。由于他是一位非常严谨的人，为了能一次就申请成功，他开始了解美国人移民的历史，在这个过程中，他逐渐学习到了美洲印第安人的历史、各种不同部落的历史变迁等，有好几次他通过电话向我索取相关的历史文献资料，这些资料他都全部仔细研究了一遍。不过对他而言，研究这些资料的同时又带来了更多的疑问，甚至包括关于他们的历史是不是真实的这样的问题。在之后的一周里，哥德尔着手开始研究美国的历史，特别是美国宪法的制定过程及其文本内容更是引起了他的浓厚兴趣，除此之外，普林斯顿的历史也成为了他重点关注的对象，他想从我这里借到关于普林斯顿行政区和伊丽萨白镇之间的行政区域划分的资料。我试图向他解释所有这些知识对他而言都是毫无必要的，当然也是没有任何实际用途的。但是哥德尔坚持他的想法，不得已我向提供了他想知道的所有相关信息和资料，其中包括普林斯顿的有关情况。之后，他又了解了区议会和镇议会是如何选举产生的，谁是镇长，镇议会是如何运行的。他认为在面试过程中有可能被问到这类问题。如果他不了解自己生活的小镇，这将会给审核的人留下不良的印象。

我努力向他说明这类问题永远也不会被问到，最有可能问到的问题都是形式上的，并且谁都能轻松地给出答案，比如最常见的问题是，这个国家的政府是哪种类型的政府，或是最高法院叫什么。然而无论怎么样，他还是坚持要仔细研究一下美国宪法。

几天后，他颇为神秘、但又带着几分兴奋地告诉我说，在他分析宪法时，他发现了其中有一些内在的自相矛盾之处，而且他还发现利用宪法中的这些漏洞，一个人可以用一种完全合法的方法成为一位独裁者，并且建立起一个法西斯帝国。令他苦恼的是，这决不是当初制订宪法的人希望看到的。我告诉他这类事根本不可能发生，甚至即使他是正确的（当然我对此抱有强烈的怀疑态度）也不可能在现实中真正发生。但是他坚持他的观点，为此我们还特地讨论了他的这些可谓惊世骇俗的发现。我极力劝说他在特伦顿（新泽西州首府）法庭面试时千万不要提及类似的话题。之后我又把这件事告诉给了爱因斯坦，他也被哥德尔的这种观点给吓到了，并且也对哥德尔说不必对此感到焦躁不安，也完全不用去讨论其可能性。

几个月之后，去特伦顿接受审查的日期到来了。那天，我开车先去接哥德尔，他坐在了车的后排座位上，之后我们又去麦瑟尔街爱因斯坦的家中把他也拉上。在路上，爱因斯坦故意转过身去问他："哥德尔，你真的已经为这次审核做好全部准备了吗？"当然，这个问题让哥德尔更加紧张了，他越发显得心烦意乱了，而这正好是爱因斯坦的目的，他对于哥德尔脸上流露出的紧张感到十分好玩。当我们到达特伦顿之后，我们三个人被带进了一间大房子。按照正常的程序，对见证人和申请人的提问是分开进行的。但是由于爱因斯坦的出现，我们得到了

特别的照顾。工作人员十分客气地邀请我们并排坐在一起，当然哥德尔坐在我们中间。审查官首先询问了爱因斯坦，之后又问了我几个问题，他问我们认为哥德尔是否会是一名良好的公民。我们向他保证这绝对不是问题，他是一位受人尊敬的先生，等等。在此之后，审查官转而向哥德尔提问："现在，哥德尔先生，您来自哪里？"

哥德尔："我来自哪里？奥地利。"

审查官："奥地利政府是哪种类型的政府？"

哥德尔："它是一个共和国，但是宪法规定会让它最终变为一个独裁的政体。"

审查官："噢！这真是太糟糕了，这种事永远也不会在我们这个国家发生。"

哥德尔："哦，不，在这里也会发生，我可以证明它。"

在所有可以问的问题中，审查官偏偏挑了这么一个关键问题。在他们的交流过程中，爱因斯坦和我如同芒刺在背，不过那位审查官非常聪明，他马上安慰哥德尔说："噢，上帝，可别让我们变成那样。"在这关键时刻他停止了提问，这让我们感到如释重负。当我们离开那间办公室向电梯走去时，一个手中拿着纸和笔的年轻人追了上来，他想请爱因斯坦为他签个名以作为留念，爱因斯坦满足了他的要求。在我们乘坐电梯下楼时，我对爱因斯坦开玩笑地说："被这么多人骚扰可真是让人厌烦啊？哈哈。"爱因斯坦回答道："你知道，这只是食人族的最后残余罢了。"我被他的回答弄糊涂了："这怎么会呢？"爱因斯坦解释道："是的，在过去他们想要的是你的血，而今天他们想要的是你的墨。"

下楼之后，我们就离开了特伦顿，驱车返回了普林斯顿。

当我们回到麦瑟尔街的拐角处时，我问爱因斯坦是回家还是去研究所，他回答："我回家，我的工作无关紧要。"并且他还引用了一首美国的政治歌曲。(可惜我现在记不起来歌词了，我本该把它记在笔记本上，这样如果有人能给我点提示的话，我一定能记起它们。)在去爱因斯坦家的路上，他回过头对哥德尔说："好了，哥德尔，还有最后一次审查了。"哥德尔惊讶地问："天啊，还有一次？"他又开始紧张了起来。爱因斯坦接着说："哥德尔，下次审查是在你步入坟墓的时候。"哥德尔回答道："但是，爱因斯坦，我不会'步入'我的坟墓。"爱因斯坦乐不可支："哥德尔，这不过是个玩笑罢了。"当爱因斯坦下车以后，我接着送哥德尔回家。所有的人都为这段艰难的煎熬终于度过去了而感到欣慰。哥德尔的心情也变得轻快了起来，并重新开始了他的哲学和逻辑研究之旅。

哥德尔在晚年患上了严重的精神疾病，最终导致他拒绝进食（他怀疑有人在他的食物中下毒），在1978年1月14日，他因为严重的营养不良和身体器官衰竭而不幸去世。

与一些流行的误解相反，哥德尔的不完全性定理并不是说某些真理将永远不会被认识。我们也不能从定理中推导出人类的理解能力是有限的。不完全性定理只是说明了形式体系的弱点和缺陷。因此，这就带来了一个十分奇怪的现象，尽管不完全性定理对于数学和哲学研究的意义十分重大，但它在理论基础上，对数学有效性的冲击却很小。事实上，在哥德尔发表他的证明之后的几十年间，数学已经在关于宇宙的物理学理论研究中取得了极为辉煌的成就。不但数学没有被当做一门不可靠的理论而被抛弃，数学和它的逻辑结论甚至还令人难以置信地成为了理解宇宙的核心理论。

不过，这却意味着困扰人们很长时间的关于数学“无理由的有效性”问题，将变得更为棘手了。想象一下吧，如果逻辑学家的努力最终完全成功了，会发生什么事情？这就暗示着数学完完全全地源自于逻辑、源于思考的法则。但是这门演绎的科学为什么会那么不可思议地与自然现象相符合呢？形式逻辑（也许我们甚至可以说是人类的形式逻辑）与宇宙之间是什么关系呢？在希尔伯特和哥德尔之后，答案并没有变得更加清晰。既然在过去所有的存在都是一场用数学语言表述的不完全的形式“游戏”[231]，基于这种“不可靠”体系的模型如何能对宇宙及其运行方式产生深刻的见解呢？甚至在试图提出这类问题之前，我想通过仔细分析几个例子来研究数学有效性的细微差别，让问题变得更加突出明白一些。

第8章

无理由的有效性

在第1章中，我曾经指出数学在物理学中的成功表现在两个方面：一种我称之为“主动的一面”，另一种我则称之为“被动的一面”。“主动的一面”反映的是科学家用清晰明了的、通用一致的数学术语系统阐述自然规律。更确切地说，科学家为了进一步讨论那些问题，在他们的脑海里发展出适应于特定环境的数学实体、关系式、函数或方程式。此时，研究者倾向于依赖感觉到的数学概念属性之间的相似性，以及观察到的自然现象或实验结论。在这些情形下，数学的有效性并不那么突出，因为人们可以辩解说为了与观测到的现实相符合，理论已经被修改过了。然而，“主动的一面”之中也有一部分是因为其精确性而让人感到不可思议的，关于这些内容我将在本章的稍后部分详细讨论。关于数学“被动”的有效方面，则是指完全与上述情况不同的现象，是指发展出完全抽象的数学理论的情形。此时，从总体而言，整个理论体系是自由发展的，没有考虑任何实际的、直接的实用性，只有在后来才突然发现这些理论能被转化成为预测性物理模型。在我看来，纽结理论是最适合用来理解数学主动和被动这两方面有效性的例证。

纽　　结

甚至在神话故事中，纽结就出现了，你也许能回忆起我们在前面提到过的古希腊传说中的戈尔迪亚斯结。长期以来在弗里吉亚（位于古代

小亚西亚中西部）人中一直流传着一条神谕，乘着一辆牛车进入弗里吉亚都城的第一个人将是他们的下一任王。戈尔迪亚斯是一个地地道道的农民，他碰巧驾着一辆牛车进入了城中，因此他成为了国王。出于感恩之心，戈尔迪亚斯将他的牛车敬献给上帝，并且挽了一个极其复杂的结，把这辆牛车系在了一根柱子上，没有人能打开这个绳结。之后，不知从何时起又有一条神谕开始在弗里吉亚流传，说打开这个绳结的人将成为亚细亚的王。也许真的是命运的安排，最终打开这个结的人（大约在公元前 333 年）正是亚里山大大帝，而且后来他的确成为了亚细亚的主宰者。不过，亚里山大大帝对待这个绳结的办法却绝对称不上精巧，甚至都不能说它是公正的——他用他的剑把这个结斩为了两段！

当然，我们不必回到古希腊时代去研究纽结。当一个孩子在系鞋带时，当小姑娘在挽她们的头发时，当老祖母在编织毛衣时，或者当一位水手在系泊船只时，都会使用某种类型的结。人们甚至给不同类型的结[232]起了不同的名字，例如“渔夫弯结”、“英国结”、“猫抓结”、“真爱结”、“奶奶结”、“刽子手结”等。在所有这些结中，有一个著名的“航海结”，在 17 世纪的苏格兰被认为是历史上最重要的一个结，因为正是它引起了人们对结的普遍关注，并激励人们进一步去收集和阅读所有关于结的著作。在这些书中，有一本书是当时英国的冒险家约翰·史密斯（John Smith，1580—1631）所写的，而他最为人们所熟知的则是他与印第安公主波卡洪塔斯（Pocahontas）之间的浪漫故事①。

第一位真正从数学理论的角度研究纽结的人，是法国数学家亚里山大·西奥菲勒·范德蒙德（Alexander Théophile Vandermonde，1735—1796）[233]。他在 1771 年发表的一篇论文中，第一次从数学上研究了纽结，而这也标志着纽结理论的诞生。范德蒙德第一个意识到纽结可以作

① 电影《风中奇缘》就是取材于这段真实的历史。——译者注

为位置几何（geometry of position）的对象来研究，所谓的位置几何研究的是不同位置之间的关系，在这个过程中完全忽略了大小和数量的计算。在纽结理论的发展历程中，接下来不能不提到的一个重要人物就是德国数学家、有着“数学王子”之称的卡尔·高斯了。在高斯的几篇笔记中，包含了一些纽结的图示和对纽结的细节性描述，以及对这些纽结特征的数学分析和解释。还有几位19世纪的数学家，他们对纽结理论的研究足以与范德蒙德和高斯相媲美。不过，现代数学纽结理论背后真正的推动力却是出乎大多数人意料的——人们在试图解释物质基本结构。这一思想最初起源于著名的英国物理学家威廉·汤姆逊（1824—1907），我们更习惯于称呼他为开尔文爵士。汤姆逊的大部分研究集中在原子结构理论上，也就是物质的最基本构成[234]。根据他的推测，原子应当是打结的以太细管，而在当时以太这种神秘的物质被认为是遍布整个宇宙空间的。以这种理论模型为基础的话，通过纽结的多样性，就可以解释化学元素的多样化了。

如果说汤姆逊的思考在今天看来几乎是荒谬的，那只不过是因为在汤姆逊之后，我们有近一个世纪的时间可以用来研究，并且用实验来验证和纠正电子围绕原子运行的这种原子模型理论。想象一下吧，汤姆逊提出他的原子结构是在19世纪60年代的英格兰，当时，汤姆逊被复杂烟圈萦绕在一起时的样子和稳定性所深深吸引——而这两种特征在当时被认为是原子模型的本质和核心因素。为了发展出与元素周期表对等的纽结，汤姆逊不得不把纽结分类，找出那些可能不同的纽结，正是这种对纽结的分类表引起了数学家们对纽结研究的极大兴趣。

我在第1章中曾经解释过，数学上的纽结与现实中一根绳子上所打的结十分类似，只不过是这根绳子的两端必须相连。换句话说，数学中的纽结是用一条闭合曲线来描述的，这条闭合曲线没有自由的活动绳端。图8-1展示了纽结的几个例子，其中三维空间中的纽结是通过它们在平

面上的投影来表示的。空间中任意交叉在一起的彼此两股线的位置，在图中被断开标示，用来描述更低一级的一股线。最简单的纽结——它通常被称为无结（unknot）——只是一条闭合的圆周曲线（如图 8-1a 所示）。三叶草结（trefoil knot，如图 8-1b 所示）由绳上的 3 个结组成，而 8 字结（figure eight knot，如图 8-1c 所示）有 4 个交叉点。按照汤姆逊的观点，这 3 种结在原则上能用来模拟 3 种不同类型的原子结构，例如单个的氢原子、碳原子和氧原子。尽管如此，对全部纽结进行分类的需求依然是十分迫切的，而着手进行分类整理的人正是汤姆逊的朋友，苏格兰数学物理学家彼得·加思里·泰特（Peter Guthrie Tait，1831—1901）。

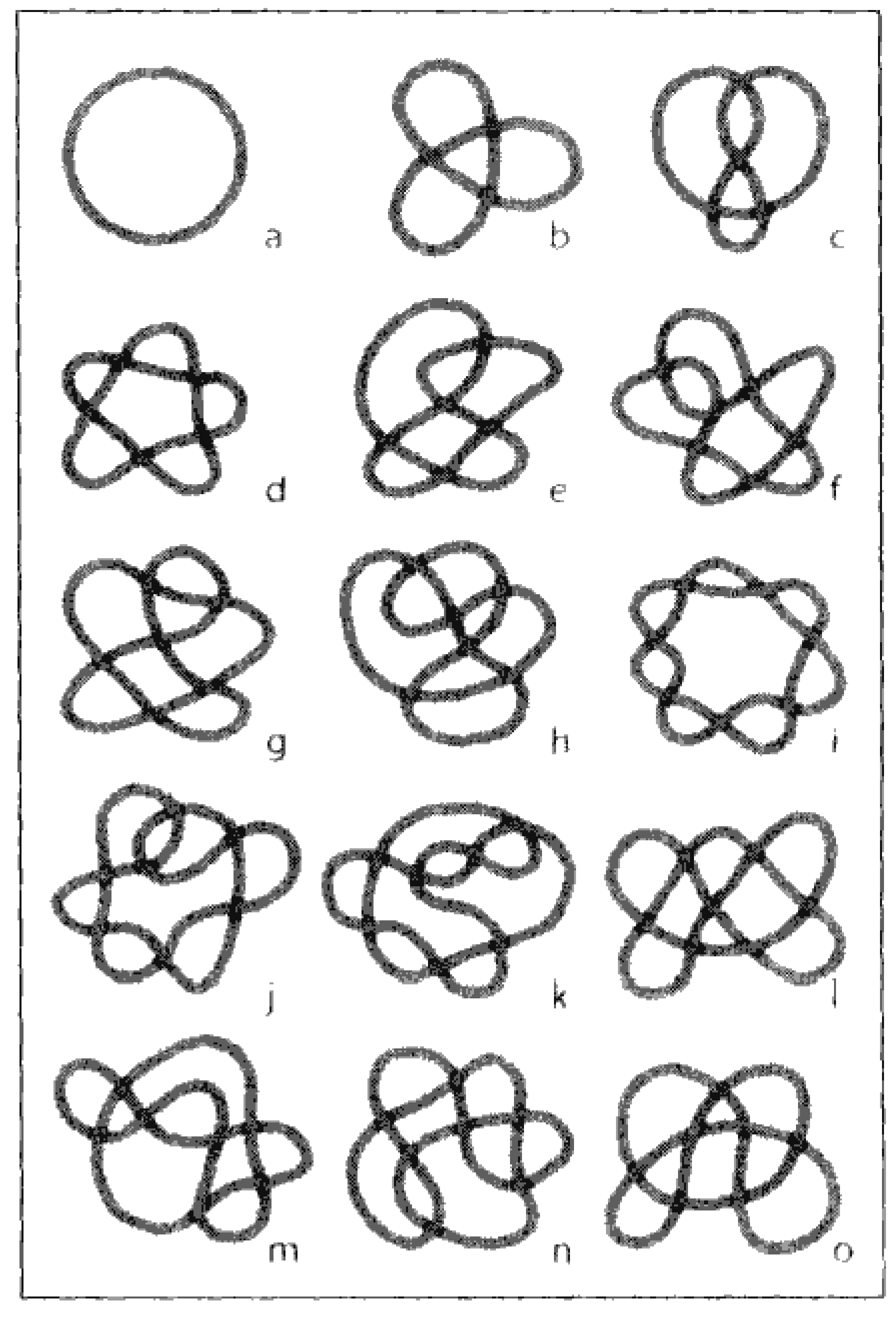


图 8-1

数学家所关心的纽结的类型，与我们可能在生活中所遇到的打了结的绳索、缠成一团的毛线完全不同。它是否真的打成结了？这个纽结与那个纽结等价吗？后一个问题的含义事实上非常简单：不切断这根线，也不要像魔术师的连接环那样将一根线穿过另外一根线，经过几次变换后，一个纽结能变形为另外一种纽结吗？图 8-2 展示了这个问题的重要性，它显示了同一个纽结通过特定处理后可以获得两种完全不同的表现形式。纽结理论的最终目的，就是精确地用数学语言证明某些纽结的确是不同的（例如图 8-1b 和图 8-1c 所示的三叶草结和 8 字结），同时忽略另外一些纽结的表面不同（例如图 8-2 所示的两个纽结）。

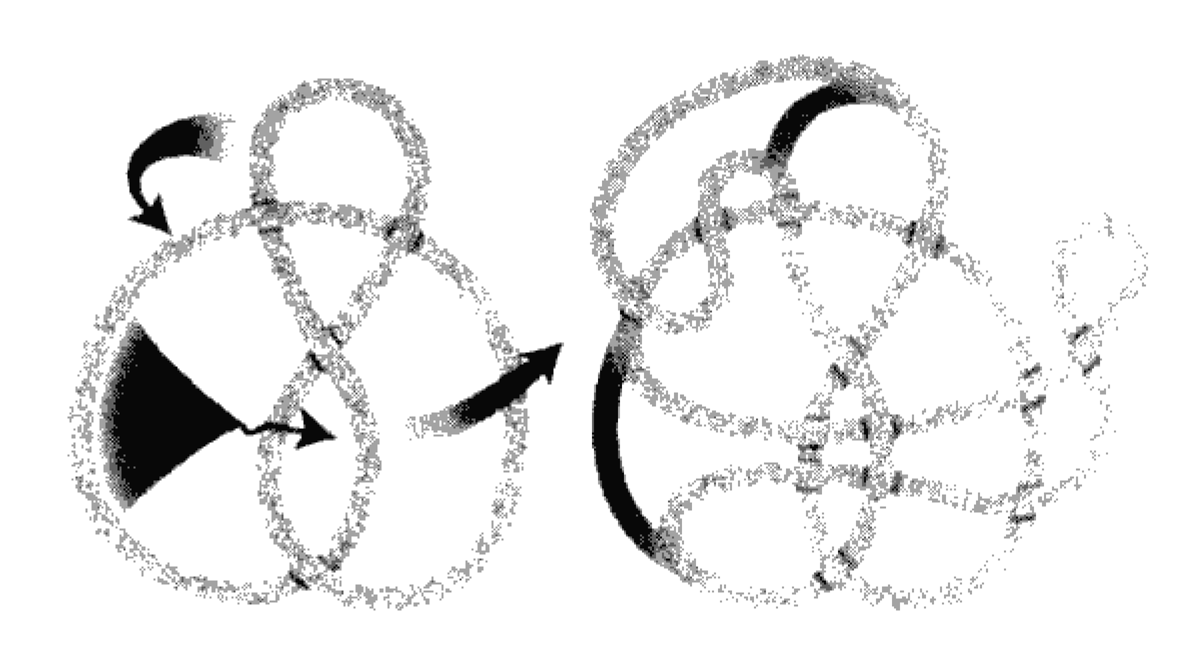


图 8-2

泰特[235]对纽结的分类工作在刚开始时进展十分缓慢。当时由于没有严格的数学原理可供遵循，他收集了只有一个交叉、有两个交叉、有三个交叉，以及有更多交叉的曲线，并将它们分门别类地整理汇集成列表。在苏格兰教会会员、牧师、业余数学家托马斯·彭特（Thomas Penyngton，1806—1895）的帮助与协作下，泰特通过找出等价纽结，筛选不同曲线以减少纽结的重复。这绝非一项简单的、微不足道的工作。想象一下吧，在每一个交叉点上，都会有两种方式来选择哪一根线是最主要的。也就是说，一根包含了 7 个交叉的曲线，需要考虑 $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$

种可能性。换句话说，在纽结的交叉面前，人类的生命是何其短暂啊，每增加一个交叉，需要考虑的可能性就会成倍增加，当纽结的交叉是十几个或者更多时，再用这种直觉的方式去给纽结的种类进行分类，几乎就是一个不可能完成的任务！尽管如此，泰特的努力并没有不受赏识。著名的数学家、物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦，正是他用数学公式总结了经典电磁学理论，他对托马斯的原子结构理论十分欣赏，认为“它比迄今为止所有的原子理论都更令人满意”，同时麦克斯韦也对泰特的贡献给予了很高的评价，他特地为此写了一首小诗[236]：

> 让你的纽结变为完美的卷辫，
> 锁住圆环并使其联接贯通。

截止到 1877 年，泰特已经对交叉数到 7 的所有可交互的纽结进行了分类，所谓的交错纽结是指交叉，可以上下交换，就好像编织毛毯时上下翻飞的毛线一样。泰特还发现了一些有实用价值的理论，在后来这些基本原理被命名为泰特猜想（Tait’s conjecture）。顺便提一句，这些猜想实际上非常重要，人们用尽心思去证明它，但直到 20 世纪 90 年代才有人第一次证实了它们。1885 年，泰特发表了他绘制的纽结表，在这张表中，他展示了最多达 10 个交叉的交错纽结，之后他没有再进行区分。而内布拉斯加州大学的教授查尔斯·牛顿·利特尔（Charles Newton Little，1858—1923）[237]也在 1899 年通过独立研究后发表了非交错纽结表，这些纽结的最大交叉数量也达到了 10 个。

开尔文爵士对泰特十分钦佩，在剑桥大学彼得屋学院的泰特塑像落成仪式上，开尔文作了深情的演讲：

> 我记得泰特有一次评价说，只有科学是值得一个人付出一生去追求的。这是发自肺腑的一句话，但是泰特本人却证实了

它也有不对的时候。泰特能大段大段地背诵莎士比亚、狄更斯和萨克雷等人的作品，记忆力非常出众，凡是他在阅读中能引起他共鸣的文字，他读过一遍之后就能记住。

遗憾的是，当泰特和利特尔完成他们那张纽结表的宏伟工作时，先前被看做可能是对原子结构最佳解释的开尔文理论，已经被科学家们完全抛弃了。尽管如此，人们对纽结的兴趣仍然没有减退，不同之处在于，正如数学家麦克尔·阿蒂亚指出的："纽结成为了理论数学中只有少数人才能理解的数学分支。"

有一个数学分支，其中量的大小（诸如大小、平滑性，甚至包括外形）都被完全忽略了，这就是拓扑学（topology）。拓扑学[238]可以被形象地看做是橡胶皮几何，它研究的是当空间以任何方式延伸或变形时（当然在这个过程中不能被撕成片或钻上孔），那些仍然保持不变的属性。根据这一描述，纽结属于拓扑学研究的范畴。顺便提一句，在数学家们的眼中，结（knot）、链（link）和辫（braid）是完全不同的的几个概念，在他们看来，只有一个打上结的环是纽结，有多个结的环、并且这些结都缠绕在一起的称为链，而有多条垂直的线与一根水平线在顶端相连的链称为辫。

如果你对区分纽结类型的困难性还是没有什么直接认识的话，那么我在这里将提供一个非常生动的例子。查理·利特尔的纽结表是在1899年发表的，在这之前，他进行了长达6年的艰苦研究，在他的那张表中包含了43种有10个交叉的非交错结。这张表在后来被许多数学家仔细研究过，在其出版之后的75年里，一直被认为是完全正确的。直到1974年，纽约的一位律师、数学家肯尼斯·珀克（Kenneth Perko）[239]用几根线绳在他家里起居室的门上作了许多验证性实验，来逐个检验利特尔那张著名的纽结表，出乎意料的是，他发现利特尔表中的两个纽结事实上

是同一个结。今天我们通常认为有 10 个交叉的非交错结的数量是 42 个。

20 世纪的许多数学家都见证了拓扑学取得的辉煌成就，相对而言，纽结理论的发展却十分缓慢。研究纽结的数学家们的一个主要目标是确定那些真正被认可的纽结的属性，这些属性今天一般被称为纽结的不变量（invariants of knots），它们表示同一个结的任意两个投影产生完全相同的值。换句话说，不变量表示的是纽结在变形时的不会发生改变的性质，理想的不变量相当于纽结的“指纹”，这是纽结特有的属性，它不因为纽结的变形而改变。也许你能想象出的最简单的不变量就是纽结交叉的最小数量。例如，不论你想什么办法去解三叶草结（如图 8-1b 所示），你永远不可能把交叉的数量减少到 3 个以下。不幸的是，有证明表明交叉的最小数量并不是最有用的不变量。首先，正如图 8-2 所显示的，想要确定一个纽结是不是能用最小数量的交叉来表示，并不总是一件轻松的工作。其次，也许更为重要的是，许多事实上完全是不同类型的纽结，但其交叉数目却是相同的。例如，在图 8-1 中，有 3 个不同的纽结，它们的交叉数量实际上都是 6 个，而目前我们已知有 7 种不同类型的纽结，其交叉的数量都是 7，因此，交叉数量的最小值并不能区分大多数纽结。最后，用交叉的最小数量值来表示纽结还是有点过于简单了，在实际研究中无法对纽结的认识和理解提供更加有效的帮助。

这种让许多数学家都挠头不已的现象，在 1928 年被很好地解决了，直到此时，纽结理论才称得上有了真正意义上的突破。[240]它是由美国数学家詹姆斯·韦德·亚里山大（James Waddell Alexander，1888—1971）发现的，这是一个非常重要的不变量，现在我们通常称之为亚里山大多项式。对于亚里山大多项式有一好一坏两个消息：好消息是如果两个纽结有不同的亚里山大多项式，那么可以肯定地说，这两个纽结是不同的；而坏消息则是，如果两个纽结有相同的亚里山大多项式，它们仍然有可能是不同的纽结。所以，尽管亚里山大多项式极其有用，但它还是不能

完美地区分纽结。

在此之后的40年中，数学家们一直在为探索亚里山大多项式的基础概念而不懈努力，并且在这个过程中，对纽结的属性有了更加深入的认识。你也许会问，他们有必要对这个课题进行如此深入的研究吗？毫无疑问，他们这么做不是为了什么实际的应用。汤姆逊的原子理论在当时早已被人们抛入历史的故纸堆里了，而且在科学、经济学、天文学，或者其他任何一门学科中也没有出现需要用纽结理论解决的问题。数学家们在纽结理论上花费了无数的时间，其原因很简单，他们仅仅只是为了好奇而已！在他们眼中，纽结理论的思想和纽结的规律是非常优美的。由亚里山大多项式所反映出的那种瞬间的芳华和灿烂，对数学家的吸引力是无可抗拒的，尤如珠穆朗玛峰对乔治·马洛里（George Mallory）的诱惑一样。有人曾经问这位著名的探险家，为什么他要冒着生命的危险去攀登珠穆朗玛峰，他的回答是极为经典的："因为它就在那儿。"

到20世纪60年代晚期，著述颇丰的英裔美国数学家约翰·赫顿·康威（John Horton Conway）[241]发现了一种逐步"解开"纽结的办法，由此，他揭示了纽结和亚里山大多项式之间本质性的联系。特别是，他引入了两个简单的"外科手术式"的运算，这两个运算为定义一种纽结的不变量提供了基础性的关键帮助。康威的操作，又被戏称为翻转（flip）和平滑（smoothing），图8-3对此进行了示意性描述。在翻转中（如图8-3a所示），纽结的交叉处通过让上面的线转到下面来实现变换（这幅图也展示了在一根真实绳子上，纽结是如何完成这一变换的）。请注意，很明显翻转改变了一个纽结的本质。例如，你本人就可以轻松地验证，图8-1b中的三叶草结通过翻转可以变换为如图8-1a所示的无结。康威提出的平滑操作则通过让这两段绳子改变方向而完全消除了纽结的交叉。尽管数学家从康威的研究工作中获得了全新的理解和认识，但他们在之后的近20年里仍然确信，不可能再发现其他类似于亚里山大多项式的不可



变量。然而，情况在 1984 年却发生了戏剧性变化。

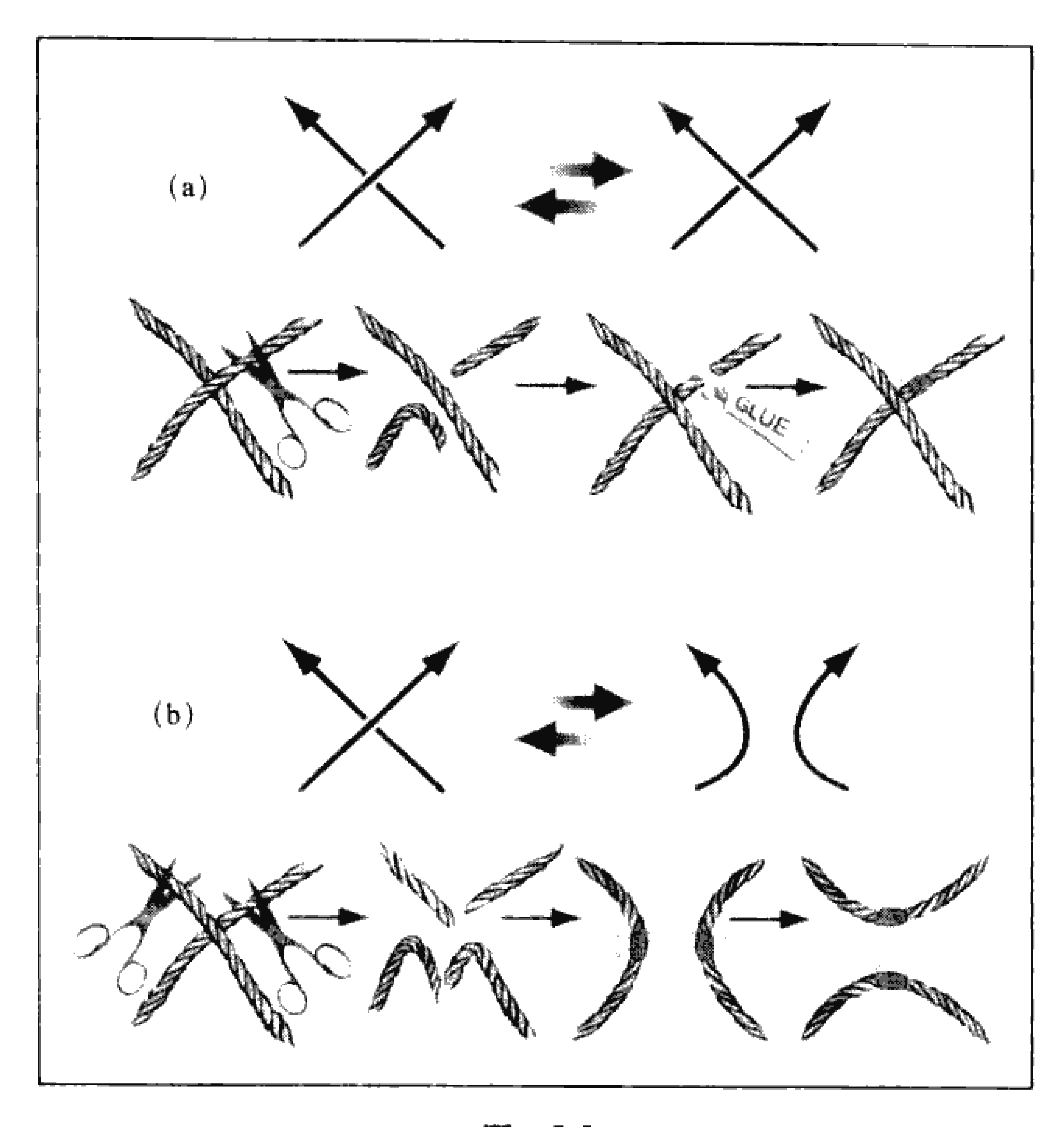


图　8-3

新西兰裔美国籍数学家沃恩·琼斯（Vaughan Jones）研究的根本就不是纽结理论。确切地说，他探索的是一个更加抽象的世界，他的研究课题今天一般称为冯诺伊曼代数（von Neumann algebras）。出乎意料的是，琼斯注意到冯诺伊曼代数中的一个关系式与纽结理论中的某个关系式极为相似，为此他专门和哥伦比亚大学的纽结理论专家琼·波曼（Joan Birman）进行了讨论，分析了这个关系式在纽结理论中应用的可能性，最终产生了一个全新的不变量——琼斯多项式（Jones polynomial）[242]。

人们惊讶地发现，与亚里山大多项式相比，琼斯多项式是一个更加“敏感”的不变量。例如在区分纽结和它们的镜像纽结时（如图 8-4 所示的两个三叶草结），从亚里山大多项式分析，这两个纽结的不变量是相同的，但是从琼斯多项式得出的不变量，则显示这是两种不同类型的纽结。对于纽结理论研究而言，更加重要的是这个新的不变量的发现是一项前所未有的进步，它极大地鼓舞了研究者们的热情，似乎在一夜之间唤醒了沉睡多年的纽结理论世界，就好像联邦储备委员会突然降低存款利率，就立刻使得股票交易所的交易量明显活跃了起来。

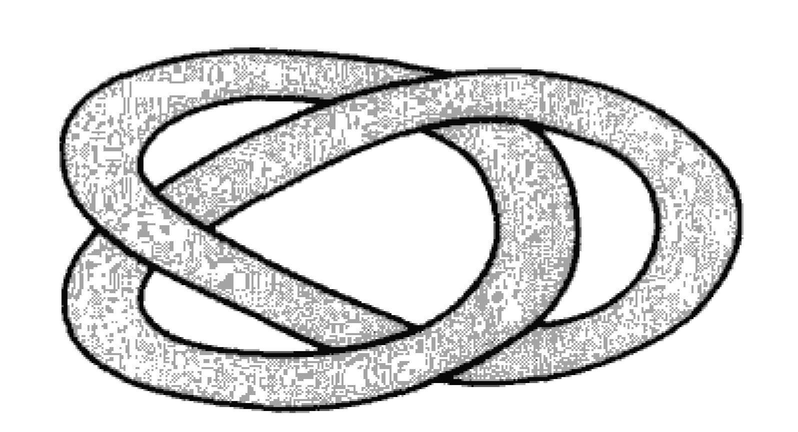
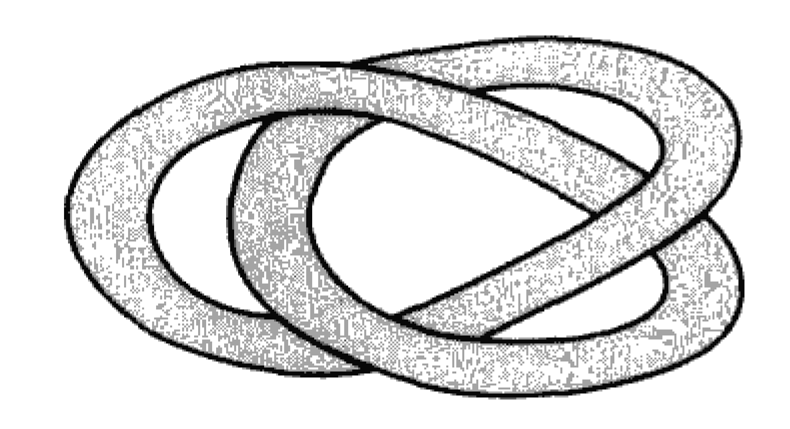



图　8-4

琼斯的发现不仅在纽结理论的研究中有着极高的价值，在其他领域中也十分有用。人们突然发现琼斯多项式在数学和物理学中的众多不同分支里都可以应用，其适用范围涵盖了统计力学（它研究的是原子或分子大集合的行为）、量子群论（数学的一个分支，研究亚原子物理世界）。几乎全世界的数学家都为此而振奋了，他们似乎情不自禁地陷入了一种寻找更加通用的不变量的狂热之中，而这个更加通用的不变量也许包含琼斯多项式和亚里山大多项式。这场数学竞赛的结果，也许是人类科学史上所有竞赛中最让人惊愕的一次了。仅仅在琼斯多项式公开发表的 4 个月之后，有 4 个独立工作的研究小组，共计使用了 3 种完全不同的数学方法，同时宣布他们发现了一个更加“敏感”的不变量。新的多项式被命名为 HOMELY 多项式，它实际上是由所有这些发现者姓名的第一个

字母组合而成的，他们是霍斯特·奥纳（Hoste Ocneanu）、米里特（Millett）、弗雷德（Freyd）、莱克瑞西（Lickorish），还有耶特（Yetter）。事情到这里并没有结束，似乎已经有了 4 组选手越过终点线还有点不够，两位波兰数学家 Przytycki 和 Traczyk 也各自独立地发现了与上述 4 组研究人员发表的完全一样的多项式，但是由于糟糕的邮政系统，他们错过了发布日期。因此，这个多项式也被称为 HOMELYPT 多项式（也叫 THOMFLYP 多项式），很明显，这是在 HOMELY 的基础上又增加了这两位波兰发明者名字的首字母。

此后，虽然人们又发现了其他一些纽结不变量，但是对纽结的完全区分事实上仍然是一个没有彻底决定的难题。如何通过变形（而不是剪刀）把一个纽结准确地变换成为另外一个纽结，这个问题至今也没找到令人满意的答案。到目前为止，最新的不变量是由俄罗斯裔法国籍的数学家麦克西姆·康特塞维奇（Maxim Kontsevich）发现的，他因此在 1998 年荣获了具有崇高声望的菲尔兹奖，并在 2008 年又荣膺克雷福特奖。顺便提一句，1998 年匹泽学院（位于加利福尼亚州的克莱蒙市）的吉姆·霍斯特（Jim Hoste）和纽约的杰弗里·威克斯（Jeffrey Weeks）把所有包含 16 个或 16 个以下交叉的纽结全部列举了出来，并形成了一张表。田纳西大学（座落于美国田纳西州东部的诺克斯维尔市）的莫文·瑞斯特威特（Morwen Thistlethwaite）也独立完成了此项工作，并且同样绘制出了类似的一张列表，每张表中包含 1 701 936 个不同的纽结！

不过，纽结理论本身的发展过程并不是真正令人惊讶的。事实上，最让人感到不可思议的是，在经历了多年的发展之后，纽结理论又重新回到了起点，这种回归是极富戏剧性的，数学家们绝对没有想到，并且在众多科学领域中都出现了[243]。

生命之结

回想一下，你也许还记得，我在前面曾经提到过，最初促使纽结理论诞生的是一种错误的原子结构理论。尽管人们普遍认为这种原子结构理论是错误的，但是数学家们并没有气馁，他们以巨大的热情，在认识纽结这条漫长而艰辛的道路上，投入了极大的心血。试想一下，当纽结理论突然间变成了认识生命本身关键性的基础理论时，他们那种喜悦心情是无以言表的。你还能有其他更好的例子来说明理论数学在解释自然界时所扮演的那种“被动”的角色吗？

脱氧核糖核酸，人们更习惯于称呼它为DNA，它是所有细胞的遗传物质。它是一种长链聚合物，由两条长长的长链组成，这两条长链彼此交织缠绕数百万次，形成一种双螺旋结构。沿着这两条骨干长链（它们可以被看做是梯子两边的长粗杆），糖分子和磷酸分子交替出现。这架梯子的“横档”是由一对碱基组成，这对碱基由氢键按规定的方式相联接（腺嘌呤只与胸腺嘧啶相联，并且胞嘧啶只与鸟嘌呤相联，如图8-5所示）。当细胞分裂时，第一步是复制DNA，只有这样，子细胞才能接受副本。同样，在转录（transcription，遗传信息由DNA复制到了RNA）过程中，DNA双螺旋的一个片段被解开，并且只有一条DNA链作为模板。当RNA合成完成以后，DNA又反冲回双螺旋结构。实际上，复制和转录过程都不是以上描述的这么简单，但是，由于DNA非常紧密地缠绕在一起（为了压缩信息存储），因此除非对其进行拆解，否则那些活性生命的复制过程不可能顺利进行。而且，为了使复制过程完整地进行下去，后代DNA分子一定是不打结的，并且亲本DNA也一定要最终恢复到其原始的双螺旋结构状态。

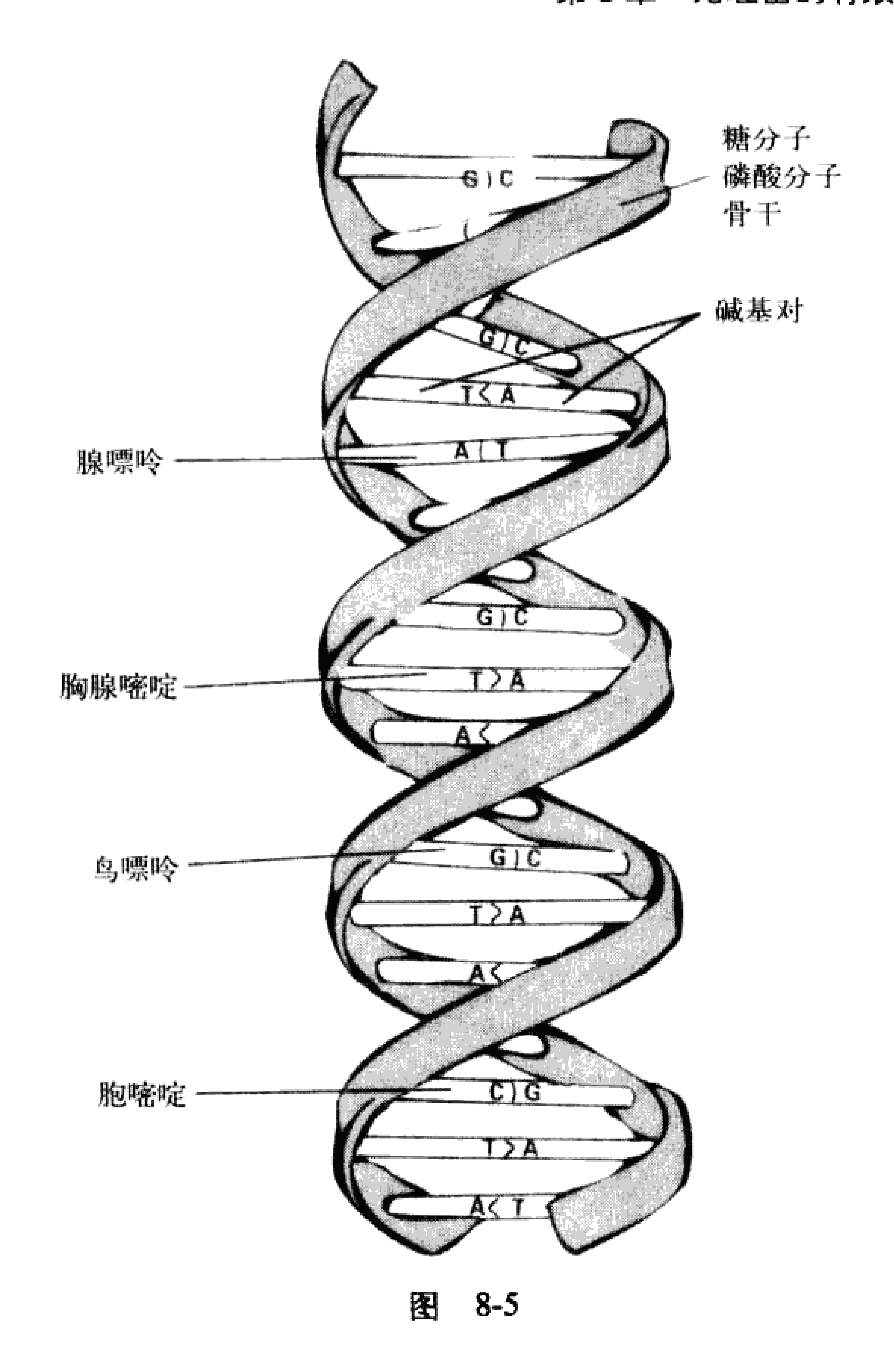


图　8-5

解开这种纽结的活性因子是一种生物酶[244]。酶可以让 DNA 链暂时断开，让一条链穿过另外一条链，并且让两个不同的终端重新联接起来。这个过程听起来是不是有点耳熟？这恰好就是康威为了解开数学上的纽结而引入的“外科手术式运算”过程（图 8-3 描述了这一过程）。换句话说，从拓扑学的观点看，DNA 就是一个复杂的纽结，这个纽结被酶打开，以便于复制和转录。从纽结理论可以得知，打开 DNA 会有多么复杂和困

难，科学家一直在研究那些能让 DNA 双螺旋结构解开的酶的属性。幸而，通过利用试验性的可视化技术，例如电子显微镜和凝胶电泳，研究人员已经能真实地观察到，并且能量化分析由酶所引起的 DNA 联接时的一些变化（图 8-6 展示了一个在电子显微镜下的 DNA 纽结）。接下来数学家面临的挑战，是从那些已经可以观察到的 DNA 双螺旋结构在解开和联接的拓扑变化中，推演出酶的作用机理。作为这一过程的副产品，DNA 纽结的交叉数量变化为生物学家提供了一种测量酶反应速率的量纲，它用来衡量对于给定浓度的酶，在单位时间内有多少交叉受到影响。

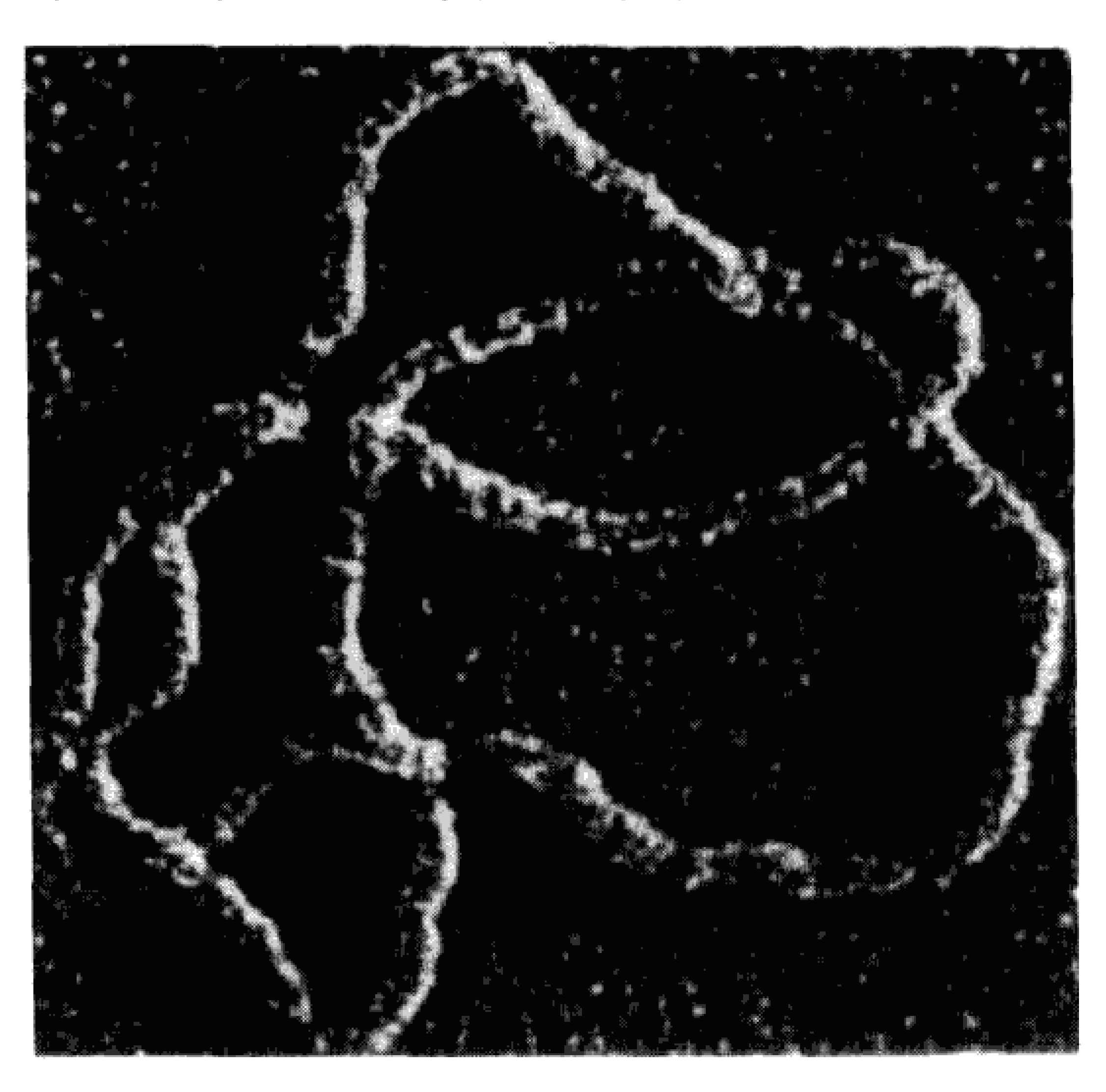


图 8-6

事实上，分子生物学并不是纽结理论唯一的应用领域，也不是事先没有预期却得到意外应用的唯一学科。弦论，一种试图系统阐述自然界中所有的力的大一统理论，同样也出乎意料地与纽结理论联系在了一起。

宇宙是在一根弦上吗

引力是宇宙中作用范围最广泛的一种力。它让星系中的星辰结合在了一起，并且还对宇宙的扩张产生深远的影响。爱因斯坦的广义相对论实际上就是一种特殊的引力理论。当我们深入到原子核中时，一种全新的理论和其他类型的引力主宰了这个领域。原子核的强大力量，让一种称为夸克的粒子结合在一起形成了我们所熟知的质子和中子，它们是构成物质的基本微粒。粒子的运动和亚原子世界的引力，是量子力学主宰的。夸克和银河系都遵循同样的法则吗？物理学家们的确认为是这样的，甚至连他们自己也不能十分确切地回答出究竟是为什么。几十年来，物理学家一直在研究一种“普适的理论”，用来将自然界的法则统一为一体。他们还想通过引力的量子理论，在最大的物体（整个宇宙）和最小的物质（亚原子）之间架起一座沟通的桥梁，这实际上就是广义相对论和量子力学的统一。而弦论似乎就是目前最有可能满足这种涵盖一切的需求的理论。刚开始的时候，弦论[245]是为研究原子核而发展起来的一门理论，后来被认为有错误而被放弃了，很少有人知道还有这么一个理论。但是在 1974 年，在物理学家约翰・施瓦兹（John Schwarz）和约耳・谢尔克（Joel Scherk）的共同努力下，它好像突然焕发出强大的生命力，从汲汲无名迅速变得炙手可热了。弦论的基本思想实际上非常简单，它认为，基本的亚原子微粒，诸如电子和夸克，并不是一种没有结构的点状实体，而是代表那些相同的弦在振荡时的不同样式。根据这种理论，宇宙中充满了微小的、脆弱的像橡皮筋一样的环。就好像拨动小提琴上不同的弦时，会产生不同的和声，这些环状的弦，在以不同频率振荡时相当于截然不同的物质微粒。换句话说，我们身处的世界在某种程度上就是一首交响乐。

因为弦是在空间中移动的闭合环，随着时间的流逝，它们以圆柱形

式（如图 8-7 所示）扫过空间区域，物理学家将之命名为世界面（World Sheet）。如果一根弦发出其他的弦，这个圆柱就会分叉形成 Y 字型结构。当有许多弦交织在一起相互作用时，它们就会形成一个极端复杂的网络，这个网络是由混合在一起的、多纳圈似的外壳组成的。在研究这些复杂的拓扑结构类型时，弦论学家希罗斯·奥格瑞（Hirosi Ooguri）和卡瑞·瓦发（Cumrun Vafa）[246]发现了环状外壳的数量，这是结的固有几何属性，与琼斯多项式之间有着紧密的联系，其耦合度之高令人感到震惊。甚至在更早一些时候，爱德·威顿（Ed Witten，他也是弦论发展史上有着重要影响力的关键人物之一）[247]已经建立起琼斯多项式与弦论中基本理论之间的这种联系，其理论被称为量子领域理论（quantum field theory），而这在先前即使是最有想象力的人也绝不会想到的。威顿的理论模型后来又被数学家麦克·阿蒂亚爵士从理论数学角度重新进行了研究[248]。这样，弦论和纽结理论形成了某种完美的共生关系。一方面，弦论从纽结理论的研究中受益；另一方面，弦论又促进了纽结理论的发展。

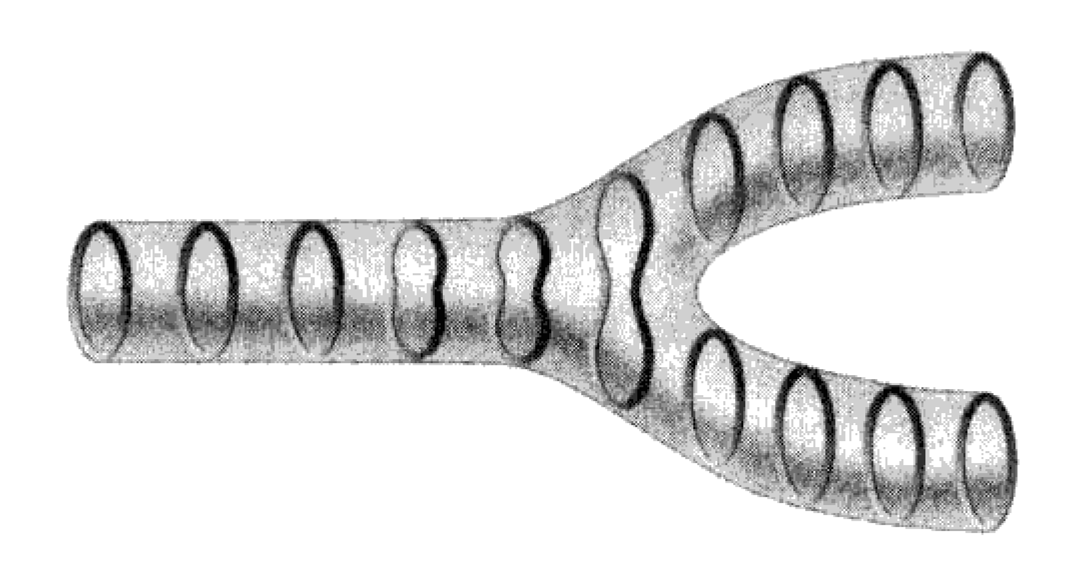


图 8-7

弦论试图在更加广阔的范围内寻找物质最基本构成的解释，这与最初汤姆逊探索原子结构理论时十分相似，他曾经认为纽结理论能提供答案。通过一个奇妙的轮回之后，弦论学家发现纽结理论至少可以提供一部分答案。

组结理论发展的历程充分证明，数学具有某种人们意料之外的力量。我先前提到过，当科学家需要描述观察到的现象时，尤其是他们发现已有的数学理论不足以满足他们的需要时，他们自己创造数学工具，这时起作用的就是数学有效性“主动”的一面。从观察和分析精确性的角度来看，这一面同样表现出某些令人迷惑不解的地方。这里我简要介绍一个发生在物理学中的例子，在对该课题的研究过程中，数学的主动性和被动性这两方面的有效性都发挥了重要任用，而这个课题也因取得的精确性而格外引人注目。

重要的精确性

伽利略和其他意大利经验主义论者发现了下落物体的运行规律，开普勒研究确定了行星运动规律，而牛顿则把他们的研究统一在了一起，并且提出了普适的、用数学语言描述的引力规律，在这个过程中，牛顿不得不研究发展了一门全新的数学分支——微积分，从而简洁而又条理清晰地正确表达他所提出的引力和运动规律的所有属性。在牛顿本人所做的实验和观察中，能证实其引力理论正确的实验和观察数量不足总数的 4%，然而，引力理论的正确性却远远超过了所有合理的预测。到了 20 世纪 50 年代，实验的精确性已经达到了百万分之一，但就在最近，有一些推测性的理论（这些理论的目标是解释我们所处宇宙似乎还在加速扩张的原因）提出，在非常小的范围内，引力可能会改变其行为方式。回想一下，我们在前面曾经讲过，牛顿的万有引力定律表明物体间的引力大小与它们之间距离的平方成反比，这也就是说，如果两个大质量物体间的距离扩大两倍，这两个物体所受引力变为最初的四分之一。有一些新设想预测，当物体间的距离小于 1 毫米时（1 英寸的 $\frac{1}{25}$），会出现反常情况。埃里克 · 阿德尔波格（Eric Adelberger）、丹尼尔 · 开普纳

（Daniel Kapner）和他们在华盛顿大学的合作者[249]西雅图（Seattle）进行了一系列开创性的实验，来验证这种根据距离变化而产生的改变（特别是距离变化非常微小时的引力变化）。他们最新的实验结论在 2007 年 7 月正式发表，这些实验结果表明，引力与距离平方成反比的规律，在距离为 1 毫米的 56/1000 时依然有效。因此，这条大约在三百年前根据非常有限的观察总结得出的数学规律，不仅是难以置信地精确，而且直到目前，在我们甚至都无法探查的范围内，它仍然是有效的。

不过，还有一个非常重要的问题牛顿没有回答：引力是如何真正起作用的？地球距离月球的距离是 25 万英里，那么引力究竟是如何对月球运动产生影响的？事实上，牛顿本人也已经意识到了他的理论存在的这一瑕疵，并且在他所撰写的《原理》中公开承认了这一点：

> 到目前为止，我们已经解释了由引力引起的天体运行现象和海水潮汐运动，但是我们没有分析产生这种力量的原因。可以确信的是，它一定是来自某种穿越太阳和行星中心的因素，并且将其效力向各个方向扩散，直到非常遥远的距离……然而截至现在，我还不能确定这些现象背后的引力及其特征产生的原因，并且也无法对它提出假设。

那位下定决心面对牛顿提出的这个没有给出满意解释的问题的人，正是阿尔伯特·爱因斯坦（1879—1955）。特别是在 1907 年，爱因斯坦对引力产生了浓厚的兴趣，这是因为他研究的狭义相对论[250]，似乎与牛顿的万有引力定律产生了直接冲突。

牛顿相信引力的作用是瞬时的。他认为行星感受到太阳的吸引力，或者一个苹果感受到地球的吸引（而落到地面上），根本不需要花费任何时间。然而另一方面，爱因斯坦的狭义相对论的核心支柱理论，认为任何物体、能量或信息的运行速度都不可能超越光速，那么引力作用又怎

么可能是瞬时的呢？正如下面的例子所表明的，这一矛盾冲突的结果，对于那些已经根深蒂固的基础性概念（例如我们对因果关系的理解）的影响是灾难性的。

想象一下，假如太阳突然消失不见了，也就是说那种让地球在圆形轨道运行的力不存在了，那么根据牛顿运动定律，地球将立刻开始沿直线运动。当然，由于受到其他行星的引力影响，这个直线运动可能会有一些细微的偏差。但是，在地球上的人们看来，太阳是在它消失的那个时间点的 8 分钟以后才真正不存在的，因为光线从太阳到达地球，就需要 8 分钟的时间。换句话说，按照牛顿的观点，地球运动状态的改变将会在太阳消失之前发生，这显然是不可能的。

为了消除这一矛盾，同时也是为了解释牛顿没有回答的问题，爱因斯坦几乎是有点偏执地寻找一种全新的引力理论。这是一项令人感到畏惧的工作。新的理论不仅要保留牛顿理论那非同凡响的成功之处，而且还要解释引力如何起作用，并且还需要和狭义相对论兼容。在经历了一些错误的起点和漫长的弯路之后，爱因斯坦最终在 1915 年到达了成功的彼岸，这就是著名的广义相对论的诞生。广义相对论至今仍被许多人认为是最美的理论。

爱因斯坦的研究是革命性的，其深刻理论见解的核心是，重力只不过是时间与空间编织而成的“织物”所形成的扭曲。根据爱因斯坦的观点，就像绿草地上的高尔夫球，其运动轨迹受到场地地势的波浪起伏影响，行星也是沿着着扭曲空间中的弧形路径作曲线运动，这种弧形路径代表着太阳的引力。换句话说，当物质不存在，或者缺乏其他能量形式时，时空（spacetime，三维空间与时间的统一）将是“平的”。物质和能量扭曲时空的现象，有点类似于一个滚动的球会导致蹦床下陷一样。行星在这种空间曲线几何中，将会沿着最直接的路径运动，而这正是引力的一种表现形式。在解决了引力是“如何起作用”这个问题的同时，爱因斯坦还为引力传递

速度有多快这个问题提供了框架性的解决方案。实际上，解决这个问题就是要测定在三维时空里，这种扭曲能以多快的速度传递。这有点类似于计算池塘中泛起的涟漪的运动速度是多少。爱因斯坦的研究表明，在广义相对论中，引力传递的速度与光速完全相同，这就消除了牛顿理论与狭义相对论之间的矛盾。也就是说，如果太阳真的消失了，地球运动轨道将会在这个时间点之后的 8 分钟改变，这与站在地球上的我们观察到的完全一致。

爱因斯坦把四维时空的扭曲作为他自己的宇宙新理论的基础，这表明他迫切需要一种包含这种几何实体的全新数学理论，而在当时，这种数学理论还处于空白状况。无可奈何之下，他向他的老同学，著名的数学家马塞尔·克鲁斯麦（Marcll Crossman，1878—1936）求助：“我已经开始对数学充满了敬意，我曾经以为，研究数学中的一些过于精微的内容完全是在奢侈地浪费时间，但现在我却不这么自信了。”克鲁斯麦向爱因斯坦提出了建议，他觉得黎曼的非欧几何（我在第 6 章已经介绍过）正是他所需要的数学工具——任意维度的弯曲表面的几何学。对于我在本书中所提出的数学有效性中“被动”的一面，这个例子可以完美地诠释，而且爱因斯坦本人也迅速意识到了这一点，并且马上承认：“事实上我们能把（几何）当做物理学最为古老的一个分支。”他声称：“没有它的话，我不可能用公式来表达相对论。”

在验证广义相对论时，这一理论预测的精确性也同样给人留下了深刻的印象。验证广义相对论实际上非常困难，因为在时空中由诸如太阳等对象引发的扭曲率，其测得的数值仅仅是百万分之几。尽管最初的测试都与太阳系的观测有关（例如与牛顿万有引力预测相比，爱因斯坦广义相对论预测到了水星运动轨道的微弱改变），最近越来越多太阳系之外的验证方法也变得可行了。其中，一个最好的证明就是利用双脉冲星进行的。

脉冲星是一种结构极其紧密、向外辐射电波的天体。由于它的结构十分紧密，因此虽然它的直径通常都比较小，仅仅只有六英里左右，但是它的质量却非常大，甚至比太阳的质量还要大。脉冲星上的一立方英寸的物质，质量大约是十亿吨，可以想象，这种星星（又称为中子星）的密度有多高。大多数中子星的旋转速度都非常快，在旋转的同时从它们的磁极辐射出无线电波。在它的磁轴与旋转轴逐渐重合的过程中（如图 8-8 所示），中子星每旋转一周，我们就能观察到一次给定磁轴发出的无线电射线，这有点类似于从灯塔中发出的闪光。在这个例子中，无线电波的发射将呈现出一种脉冲振动的特性，这也正是“脉冲星”这个名字的由来。在某种情况下，当两颗脉冲星在一个封闭的轨道上围绕它们共同的引力中心旋转时，就形成了双脉冲星系统。

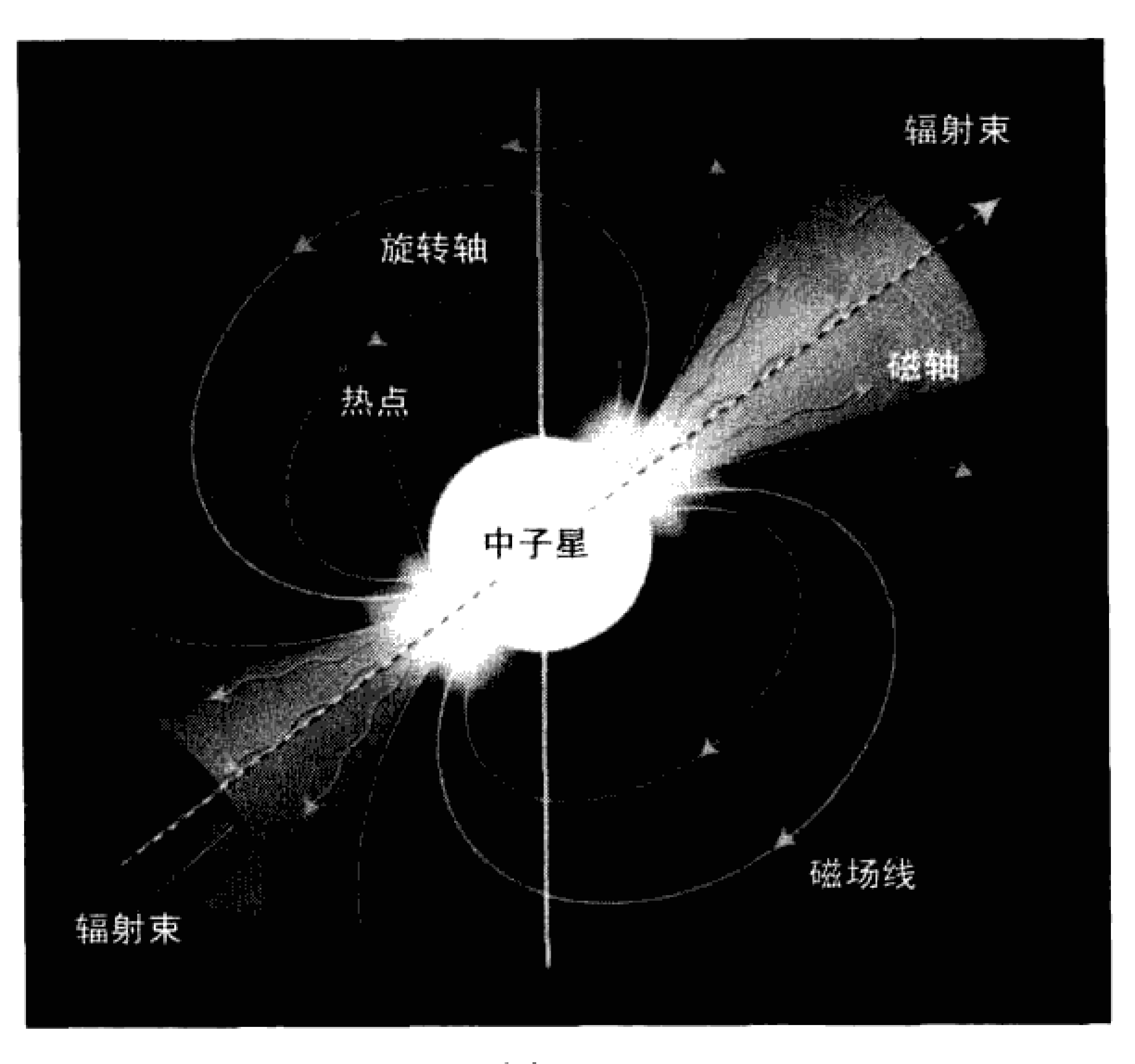


图 8-8

双脉冲星有两个特性，使得它成为了验证万有引力定律的绝佳素材：（1）无线电脉冲星是最精准的时钟，它们的旋转频率极其稳定，事实上它们的精确度甚至超过了原子时钟。（2）脉冲星的结构极其紧密，这使得它们的重力场非常强，也使其产生了非常明显的相对论效应。这些特征使天文学家可以非常精确地观察和测量到，双脉冲星在彼此引力场影响下产生的轨道变化导致光从脉冲星到达地球这段时间内发生的变化。

最近的测试是针对 PSRJ0737-3039A/B 的双脉冲星系统进行的时间精确度测量（这个长长的“电话号码”代表了该天体系统在天空中的坐标）[251]，这一测试所花费的时间长达两年半。这两颗脉冲星完成一次轨道旋转需要 2 小时 27 分钟，该系统距离地球大约 2000 光年（光年是一个长度单位，它是指光在真空中传播一年所行经的距离，大约为 6 兆英里）。英国曼彻斯特大学的天文学字迈克尔·克瑞莫（Michael Kramer）领导的一个研究小组测量了爱因斯坦相对论对牛顿运动定律的校正量，他们的实验观测结果在 2006 年 10 月发表，结果证明与广义相对论预测的值十分相符，误差不超过百分之 0.05！

顺便提一句，广义相对论和狭义相对论都在全球定位系统中扮演了重要角色。全球定位系统可以帮助我们确定自己在地球上的位置，同时也能帮助我们确定从一个地点到另外一个地点的准确路线，无论是驾车、乘飞机或者是步行，全球定位系统都能为我们提供有益的帮助。全球定位系统之所以能判定使用者当前所处的位置，是测量了天空中几颗卫星发射的信号到达地面接收机时所消耗的时间，之后再利用三角测量法对每颗已知位置的卫星进行统一计算后得出所需的位置信息。狭义相对论预测，因为相对运动，卫星上的原子时钟要比它们在地面上时走得慢一些（平均每天慢大约百万分之几秒）。而广义相对论则预测卫星时钟要走得快一些（平均每天快大约十万分之几秒），这是因为地球质量引起的时空扭曲，对于天空中物体的影响要比地球表面物体的影响弱一些。如果

不对这两种引力效应进行修正的话，全球定位系统的错误会以每天超过 5 英里的速度进行累加。

引力理论只是众多例子中的一个，这些例子充分证明了自然规律以数学公式的形式进行表达时，所体现出的那种不可思议的普适性和令人惊叹不已的精确性。在这个例子中（与其他众多例子一样），我们从数学等式中得到的要远远多于最初放进去的。牛顿以及爱因斯坦的理论，其精确性远远超越了这些理论最初试图解释的那些观察现象的精确程度。

有一个例子也许最能体现数学理论那种超越时间界限的精确性，这就是著名的量子电动力学（quantum electrodynamics，QED）。量子电动力学解释了带电粒子和光的所有现象，2006 年，哈佛大学的一个物理学研究小组[252]测定了电子磁矩（它测量了电子与磁场交互时产生的强度），精确度达到了万亿分之八。就实验本身的精确度而言，这已经是一项令人难以置信的成就。但是当我们看到，最近基于 QED 的理论计算也达到了同样的精度，并且理论预测与实验测量这两个结果竟然完全相符时，这种精确性就变得让人感到敬畏了。当量子电动力学的创建者之一弗里曼·戴森（Freeman Dyson）听到量子电动力学不断成功的消息后，他回应道："说实话，我也感到十分惊讶，这支曲子是在 57 年前我们略有点急忙的情况下谱出的，但是自然界却真的精确地按这支曲调起舞。而且，我吃惊地得知，实验人员和理论研究人员在测量和计算她的舞步时，其精确性竟然达到了百亿分之一。"

但是，准确性并不是数学理论唯一值得称道的，它还有另外一项令人啧啧称奇的特性，那就是它那神奇的预测能力。这里我只举两个简单的例子，但是却足以证明数学理论的预测功能。一个来自 19 世纪，另一个则比较近，发生在 20 世纪。前者预测了一种当时人们还无法观察到的自然现象，而后者则预测了一种全新的基本粒子的存在。

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（他系统地阐述了经典电磁学理论）在

1864年提出了一种观点，预测了变化的电场或磁场会产生传导波。这种类型的波（与电磁波，如无线电波，非常类似）直到19世纪80年代才被德国物理学家海因里希・赫兹（Heinrich Hertz，1857—1894）在实验中第一次观察到。

在20世纪60年代晚期，物理学家史蒂文・温伯格、谢尔登・格拉肖（Sheldon Glashow）和艾伯德斯・萨拉姆（Abdus Salam）共同努力发展了一种新理论[253]，该理论把电磁力与弱核力统一在了一起。今天，这一理论通常被称为*弱电理论*（electroweak theory），它预测了三种基本粒子的存在（分别叫做W^+、W^-和Z波色子），这三种粒子在过去从来没有人观察到过。直到1983年，它们才在由物理学家卡洛斯・鲁比亚（Carlos Rubbia）和西蒙・范・德・米尔（Siman Van der Meer）所领导的电子加速器实验（这个实验就是让一个亚原子粒子与另外一个亚原子以很高的能量相撞击）中被准确无疑地探测到。

物理学家尤金・维格纳，曾创造了“数学无理由的有效性”这句话，他曾提议把所有出乎人们意料之外的数学理论称为“认识论的经验法则”（认识论是研究知识起源和局限的学科）。他坚持认为，如果这种“法则”不正确的话，科学家们将会缺乏动力和到达成功彼岸的信心，而这绝对是科学家在探索自然规律所不可或缺的。然而，维格纳并没有为他所提出的认识论的经验法则提供任何解释，而是把它当做一件“绝妙的天赐礼物”，对于这件“礼物”我们都应当怀有深深的感恩之心，虽然直到今天仍不能说清楚它的起源。事实上，在维格纳看来，这件“礼物”就是“数学那无理由的有效性”这一问题的核心本质。

到现在为止，我们已经收集了足够多的线索，让我们回答本书一开始就提出的两个问题：为什么数学在解释我们周围的世界时如此有效（我相信这种有效性给每位读者都会留下深刻的印象）并且硕果累累，甚至还能孕育新的知识？数学究竟是被发现的，还是被发明的？

第9章

人类大脑中的数学和宇宙

有两个问题：（1）数学是独立于人类思维之外的存在吗？（2）为什么对数学概念最初的研究都是针对特定的课题，但当它们发展成熟后，人们通常总会发现这种面向特定背景的数学工具，其应用已经远远超过了早先的课题范畴？两个问题实际上是紧密联系在一起的，但是这种联系却又错综复杂，不可能用一句话表达清楚。为了简化讨论，我将会逐一回答它们。

首先，你也许会问今天的数学家在面对数学是发现还是发明这样的问题时，他们的回答是什么？下面我就引用数学家菲利普·戴维斯（Philip Davis）[254]和鲁本·赫什（Reuben Hersh）在他们那本经典的《数学的经验》（*The Mathematical Experience*）中，对当代数学家所处环境的生动描写：

> 对于这个问题，大部分人也许都会同意这样的观点，一位真正的数学家，当他在工作时，他是一位柏拉图主义者（他把数学当做是一种发现），而当他在休息时，他就变成了一位形式主义论者（他认为数学是一种发明）。也就是说，当他正在研究数学时，他相信他面对的是一种客观的真实存在，这种客观真实的属性正是他试图研究了解的。但是接下来，当他被要求对这种客观真实给出哲学解释时，他发现最简单的办法是假装他根本不相信它。

我没兴趣研究用“他或她”替代“他”后，数学人口统计数据有什么变化，我一直有一种印象，那就是对于今天的许多数学家和理论物理学家来说，戴维斯的这种描写和刻画也许真的就是事实。尽管如此，一些20世纪数学家的立场却十分坚定，他们要么完全支持柏拉图主义，要么完全赞同形式主义论。下面引用的是戈弗雷·哈罗德·哈代在他那本《一个数学家的自白》中的话，这段文字代表了柏拉图主义者的观点[255]：

> 对我而言，并且我认为对绝大多数的数学家们来说，存在另外一种形式的现实，我本人把它称之为“数学现实”。不过，不管是在数学家的眼中，还是在哲学家那里，对于这种数学现实的本质一直都有不同的意见。一些人坚持认为它是“人为创造”的；但是，也有些人认为，它独立于我们，是存在于我们思维之外的。一个能对数学现实给出可信解释的人，一定也能解决形而上哲学中绝大多数最困难的问题，如果他还能解释物理现实的话，他将能解决形而上哲学中所有难题。
>
> 在这里，我不想为这些问题展开争辩，甚至还装出一副“我能回答”的样子来。但是我将清楚地表明我的观点以避免误解。我相信数学现实存在于我们人类之外，人类的作用只是发现或观察它们。我们所能证明的定理，我们言之凿凿地描述的“创造”，事实上仅仅只是对我们观察的记录。自柏拉图之后的许多颇有声望的哲学家都赞同这一观点，或者对这种观点有其他不同表述方式，我也要使用这种语言，对于支持它的人来说，它是再自然不过的了。

不过，也不是所有人都同意这样的看法。数学家爱德华·凯斯纳（Edward Kasner，1878—1955）和詹姆斯·纽曼（James Newman，1907—1966）在他们合著的《数学和想象》一书中就表达了完全相反的观点[256]：

数学所享有的声誉是其他任何一种迸发出来的、目的明确的思想无法比拟的，这并不令人感到惊讶。我们必须承认，在科学领域，数学的确使科学研究取得了众多进步，它在处理实际事务中不可或缺，它使理论抽象变得更加容易理解，对其在人类智力成就中的杰出贡献的推崇绝对是它应当得到的。

尽管数学有这么多优秀之处，但是如果想从数学的各个分支中评选出哪一项研究成果最为重要，应当首推最近才出现的非欧四维几何学。当然，这绝不是说微积分、概率论、无限运算、拓扑学，以及其他我们讨论过的数学分支不重要。上述的所有这些数学分支，都极大地丰富了数学这门学科的内容，并且让我们对物理宇宙的认识更加深入。然而，这些内容没有一项像非欧几何这样的"异端邪说"那样推动数学自身的反省，并且促使人们重新认识数学内部各个分支学科领域之间的关系。

这种英勇的、关键性的、产生了"异端"精神的结果是，我们战胜了数学真理是独立存在并且与我们思维无关的观点。其实这种观点一直以来都存在，这也就是毕达哥拉斯曾经提到过的，是笛卡儿，还有19世纪以前其他一些著名数学家都赞同的。今天，数学已经从重重枷锁下解放了出来，它抛弃了过去的众多束缚。不管其本质是什么，我们认识到它如同思想一样自由，如同想象一样可以被捕捉到。非欧几何可以证明，与星空的音乐（毕达哥拉斯语）不同，这种数学是人类自己的作品，唯一限制它的只有思维的规则。

精确性和确定性是数学的鲜明标志，这是大家公认的。但对"发明还是发现"这个问题，我们则有了分歧，这种分歧在哲学或政治领域尤为典型。我们应当为此感到惊讶吗？实际上完全没有必要。数学是发现还是发明这个问题，事实上根本不是一个数学问题。

“发现”的提法暗示了在宇宙间有一种宛如前世的存在，这种存在要么是真实的、要么是超自然的，而“发明”的说法则涉及人类思维，这里的思维可能指某一个人，也可能指整个人类。因此，这个问题是一个跨学科领域的课题，它涵盖哲学、数学、认知科学，甚至人类学，而决不是数学能独立解决（至少不是能直接解决的）。因此，从这个意义上讲，数学家甚至不是回答这个问题的最佳人选。毕竟，用语言来表演魔术的诗人，不必是最好的语言学家；最伟大的哲学家也不一定必须是研究人类大脑功能的专家。对于数学究竟是“发明的还是发现的”这样的问题，只能从不同学科领域（如果有可能的话应当从全部学科领域）的众多线索中仔细探查才可以得到答案。

形而上学、物理学和认知学

那些相信数学是独立于人类思维的、宇宙之中的某种特殊存在的人，在他们区分宇宙的性质时会不可避免地分别归入两个不同的阵营[257]。第一个阵营是“真正”的柏拉图主义者，对他们而言，数学存在于一个抽象的永恒的世界里。由此，他们认为数学结构事实上是自然界的一个真实组成部分。因为我已经从多个角度讨论过纯柏拉图主义的主要观点，以及他们理论中的哲学缺陷，这里我只是粗线条地分析一下其不足之处[258]。

对于“数学是物理世界的一部分”这种观点，分析最透彻、最激进的是麻省理工学院的一位天体物理学家麦克斯·泰格马克（Max Tegmark）。

泰格马克认为“我们所处的宇宙不仅仅是用数学描述的，它本身就是数学。”[259]泰格马克的论证是从一个无可辩驳的假设为起点开始的，他假设外部的物理现实是独立于人类存在的，接着，他仔细分析了那些也许是这种现实的终极理论的性质（也就是物理学家所指的“所有事实的理论”）。因为物理世界完全与人类无关，泰格马克主张，对它的描述

一定是不带任何人类主观色彩的(特别是人类所使用的语言)。换句话说，终极理论不能包含诸如“亚原子微粒”、“振荡波”、“时空扭曲”等概念，或者其他人类构想出的结构。由此，泰格马克总结道，从这种假设出发，对宇宙唯一可能的描述，只能涉及抽象的概念，以及这些概念之间的关系，而这些内容他认为是数学定义。

毫无疑问，泰格马克对数学现实的论证还是有几分道理的，但是，即使他的观点是完全正确的，距离解决数学“无理由的有效性”这个问题，还有很长的路要走。在一个被认为等同于数学的宇宙中，数学与自然界完全符合，这并不会让人感到惊讶。然而，我发现泰格马克的推理过程并不是无懈可击、使人信服的。泰格马克本人总结说：“我认为，我们周围的物理现实是一种数学结构，我把这种假说称为数学宇宙，对此你应当深信不疑。”在我看来，从外部世界的存在(它们独立于人类存在)到泰格马克的这个结论，这之间的跨越只不过是一种小把戏而已。泰格马克试图描述数学真正的特性，他说：“在一位现代逻辑学家看来，数学就是抽象实体以及它们之间关系的集合。”但是，泰格马克所指的现代逻辑学家是人类！换句话说，泰格马克从来没有真正证明我们的数学不是由人类创造的，他仅仅只是这样猜想而已。而且，正如法国神经生物学家让·皮埃尔·尚热（Jean-Pierre Changeux）在对类似的观点表达他本人的看法时曾经指出的[260]：“针对我所研究的生物学中的自然现象，如果说物理现实属于数学客体，这将会给我带来令人不安的认识论问题。我们大脑内部的物理状态如何代表在它之外的其他物理状态呢？”

其余大多数人在把数学客体置于外部物理现实时，只是把数学在解释自然时的有效性，作为其理论的一条证据。然而，这实际上就是假设了，对于数学的有效性不可能有其他解释，这种观点我在后面会证明它并不正确。

假如数学既不存在于不受时间与空间限制的柏拉图主义论的世界

里，也不存在于物理世界中，那么这是不是就意味着数学完全是由人类创造的？绝对不是这样。我将在下面指出，大多数数学研究成果实际上都是由发现组成的。在进一步讨论之前，首先看看同时代的认知学家对于这个问题的认识是十分有帮助的，原因很简单——即使整个数学都是由人类发现的，这些发现还是来自于数学家的大脑。

近年来，认知科学已经取得了巨大的进步，很自然地，我们期望神经生物学家和心理学家把他们的注意力转向数学，特别是人类认知中的数学基础。如果仅仅只对认知科学的研究成果进行浮光掠影的了解，你的一个初步印象就会是：你观察的是马克·吐温所表达过的某种观点，只不过这些观点具体化了。马克·吐温曾经幽默地说："在一个手拿锤子的人的眼中，任何东西看上去都像一个钉子。"虽然重点略有不同，但从本质上讲，所有的神经生物学家和生物学家都断定数学是人类的创造。在仔细检查分析之后，你会发现，尽管对认识数据的解释还远远称不上清晰明了，但是毫无疑问在寻找数学基础时，认知学家的努力代表了一种开创性的全新阶段。这里有一个认知学家提出的例子，它虽然不起眼，但却很有代表性。

法国神经系统科学家斯坦尼斯拉斯·德汉尼（Stanislas Dehaene）的研究主要集中在数学认知上，在他 1997 年出版的那本《数字感觉》（*The Number Sense*）[261]中，他总结道："对数字的直觉深深地根植于我们的脑海之中。"这一观点其实与直觉论者的思想十分相近，直觉论者想让所有的数学知识都建立在自然数的纯粹的直觉形式之上。德汉尼坚持认为，有关算术的心理学发现证实了"数字属于'思维的自然客体'，就我们所能理解的那个世界而言，它属于这个世界固有的属性。"在研究了蒙杜鲁齐人（Mundurukú，这是居住在亚马逊河流域附近的一个与世隔绝的印第安人部落，其语言对数字的概念只有 1 到 4 这 4 个数字）的行为方式之后，德汉尼和他的合作者在 2006 年为几何学又新增了一个类似的判

断："这个遥远偏僻的部落反映出了，人类对几何概念或图形认识理解是无意识的、自发的，与基本数字的理解类似，几何的核心知识（如初等算术）是人类思维通用的构成要素。"[262]当然，并非所有的认知学家都赞同德汉尼的后一个结论[263]。例如，有些人就指出，蒙杜鲁齐人在最近的几何研究试验中能成功地从多根直线中辨认出曲线，从多个正方形中正确地指出混杂在其中的三角形，从多个圆形中指认出其中的椭圆，等等，除和先天的几何学知识有关外，也和人们从一堆物体中挑出与众不同的物体的能力有更大关系。

法国神经生物学家让・皮埃尔・尚热在《思维、物质和数学上的守恒》（*Conservations on Mind, Matter and Mathematics*）一书中与数学家阿莱恩・康奈斯（Alain Connes，他是一位柏拉图主义的信徒）就数学本质有一段十分有趣但却发人深省的评论[264]：

> 数学客体与人类感知到的世界无关，原因在于它们的繁殖特性，以及它们产生其他客体的能力。需要强调的一点是，在大脑中存在某种也许可以称为"自觉的分隔"的形态，这是一种物理空间，用来对新的客体进行模仿甚至创造……就某些方面来讲，那些新的数学客体像是生物体，就像生物体一样，它们这些物理客体容易受到快速进化的影响；与生物不同的是（除了病毒以外），它们的进化在我们的大脑中进行。

最终，就数学是发明还是发现这个问题，最明确的观点是由认知语言学家乔治・莱考夫（George Lakoff）和心理学家拉斐尔・努涅斯（Rafael Núñez）在他们合著的那本颇富争议的书《数学从哪里来》（*Where Mathematics Comes From*）中提出的，正如我在第 1 章中已经介绍过了的，他们声称[265]：

> 数学是人类自身的一部分。它来自于我们的肢体、我们的

> 大脑，以及我们每天的生活经验。（莱考夫和努涅斯因此称数学是“思维物化”时的副产品。）……数学是系统化的人类概念，这种概念体系充分利用了人类认知的一般工具。人类创造了数学，还有保持和拓展它的责任。在数学的画像上，一定会有人类的面孔出现。

认知科学家通过观察大量的实验结果（他们把这些结果视为无可辩驳的证据）得出结论。这些测试中有一部分涉及在执行数学任务过程中对大脑的功能性成像的研究。还有一些研究人员研究婴幼儿的数学技能，以及一些现存的原始部落中的数学表达能力，这些研究的样本基本上从来没有接受过教育，并且大多数人还有各种各样轻重不一的脑部损伤（比如蒙杜鲁齐人）。绝大多数研究者都认为婴幼儿已经表现出一定的数学能力了。例如，大部分人只用看一眼就能说出他们看到的物体数量是一个、两个、还是三个[有一个专业的术语描述这种现象，数量顿识(subitizing)]。在以分组、配对为表现形式的一些基本算术概念里，以及在一些十分简单的加法和减法中，人类也许的确表现出某种天生的能力，并且对一些非常基础的几何概念的简单理解方面，人类似乎也同样表现出这种先天的才能（尽管对于后者有一些争议）。神经系统科学家[266]还区分了大脑不同区域的功能，例如，目前普遍认为人类大脑左半球的角回似乎是进行数学计算和数字运算的关键，但它不是学习和运用语言或记忆的核心区域。

根据莱考夫和努涅斯的观点，能够超越人类那些天生的能力，使我们对数学的认知能够更进一步的最主要的工具是概念隐喻（conceptual metaphors），它是指把抽象概念转换为具体内容的思维过程。例如，算术的概念是建立在物体集合这种非常基本的代表物基础之上的。另一方面，通过布尔提出的那种更加抽象的关于类的代数，隐含般地把类和数字联系在了一起。莱考夫和努涅斯对这一复杂的场景进行了深入研究，例如，他们重点研究了为什么人类感觉到有些数学概念要比另外一些更加难以

理解。还有一些研究人员，如谢菲尔德大学的认知神经系统学家罗斯·玛丽·华莱（Rose Mary Varley），提出至少有一部分数学结构是以语言技能为基础的，也就是说，人类对数学的深刻理解，在借用了构建语言时所使用的思维工具后，得到了进一步发展[267]。

认知科学坚定地认为数学是与人类思维相联系的，他们坚决反对柏拉图主义论中的（数学世界）。有趣的是，我注意到最坚定地反对柏拉图主义的人并不是神经系统学领域的研究人员，而是麦克·阿蒂亚爵士——20 世纪最著名的数学家之一。虽然我已经在第 1 章中简要介绍了他的分析过程，但在这里我还是想再在细节上研究一下。

如果现在就让你从我们所有的数学概念中，选择一个最有可能是独立于人类思维存在的数学概念，你会选择哪一个？绝大多数人都会毫不犹豫地断定是自然数。的确，还有什么能比 1, 2, 3…更“自然”的概念吗？德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecher，1823—1891）是一位直觉论者，他公开宣称“上帝创造了自然数，其他所有的事都是人类的工作。”他的这句话广为流传。所以，如果有人能证明，作为数学概念的自然数也是源自于人类思维的话，那么这一定对赞成数学是人类“发明创造”观点最强有力的支撑证据了。在了解了上面的这些内容后，我们重新回到阿蒂亚，他曾经举了一个例证：“让我们想象一下，如果在太平洋深处，独居并与世隔绝的水母中出现了文明，水母不会有单独个体的体验，只能感觉到周围的水。运动、温度和压力将给它提供基本感知经验。在这样的环境中不会出现离散的概念，也不会有什么计数。”[268]换句话说，阿蒂亚相信即使是自然数这样最基本的概念，也是由人类通过对物理世界基本元素的抽象（认知科学家可能会说是“通过基础隐喻”）而创造的。不同之处在于，例如数字 12 代表所有那些数量为一打的物体通用属性，同样，“思维”这个词则代表发生在我们大脑中的各种过程。

读者也许反对使用那个水母为代表的“假设宇宙”来证明这一观点，

你也许会说，在我们周围只有一个无法回避的宇宙，所有猜想都应当以这个宇宙为背景。不管怎样，这种反驳类似于承认自然数这一概念事实上依赖于人类体验的宇宙！注意，这就是莱考夫和努涅斯提出的数学作为思维“物化”时所表达的意思。

我已经指出，数学概念源自于人类思维。读到这里，你可能会产生疑问，为什么在先前我支持大多数数学知识事实上是被发现的这一观点，而这一立场本质上似乎又与柏拉图主义十分接近，这不是自相矛盾吗？

发现和发明

在我们日常用语中，发现和发明的区别是十分清楚的，但是有些时候却有点模糊。没有人会说莎士比亚发现了哈姆雷特，或者说居里夫人发明了镭。针对特定类型疾病的新药通常被看做是发现，尽管它们通常涉及新化学成分的合成。这里我想举一个非常典型的数学例子，我相信它不仅能帮助我们区分发明和发现，还有助于我们深刻理解数学演化和发展的过程。

在欧几里得关于几何学的不朽名著《几何原本》第 6 卷中，我们发现有一个定义涉及把一根直线确定地分为不等的两段（更早一些的类似定义是关于面积的，出现于第 2 卷中）。根据欧几里得的观点，线段 AB 被点 C 分为两段后（如图 9-1 所示），如果以 C 为端点的这两条线段的长度比（AC/CB），与整个线段长度除以以 C 为端点的较长线段长度的值（AB/AC）相等，那么这条线段就是符合“极端平均比例”的。换句话说，如果 $AC/CB=AB/AC$，那么所有这种比例都称为“极端平均比例”。在 19 世纪时，这一比例被叫做“黄金分割率”，事实上后者要比前者更加有名。黄金分割率可用一个非常简单的代数表达式表示[269]：

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\,033\,988\,7\cdots$$

你也许要问的第一个问题是，为什么欧几里得要这么费事地定义这样一条特殊的线段，并且还专门给这个比例起一个固定的名字？毕竟，可以有无数种方式来分割一条线段。这个问题可以在继承自神秘的毕达哥拉斯学派和柏拉图学派的文化中找到答案。回想一下，我在前面曾经提到过，毕达哥拉斯学派曾经痴迷于数字的研究。他们认为奇数代表男性和善，而同时略带偏见地认为偶数代表女性和恶。他们对数学5有特殊的兴趣，5是2和3的和，3是第一个奇数（男性），2是第一个偶数（女性）。（1并没有被认为是一个数字，它被当做所有数字的源头。）因在，在毕达哥拉斯学派眼中，5是爱情和婚姻的化身，并且还用五角星（如图9-2所示）作为他们之间兄弟情谊的象征。这也是黄金分割率第一次在历史上出现。如果你作出一个正五角星，并且仔细测量其中三角形任意一长边与底边的比值，你会发现这两条边之比恰好等于黄金分割比率（如图9-2中的a/b）。同样，五角星的边角线与其边之比也等于黄金分割比率（如图9-3中的c/d）。事实上，只用直尺和圆规就可以轻松地作出这样一个正五角星（这种尺规作图画出五角星的方法在古希腊时代就有记录），在作图过程中需要把一条线段分成两段，这个分割点也是满足黄金分割的。

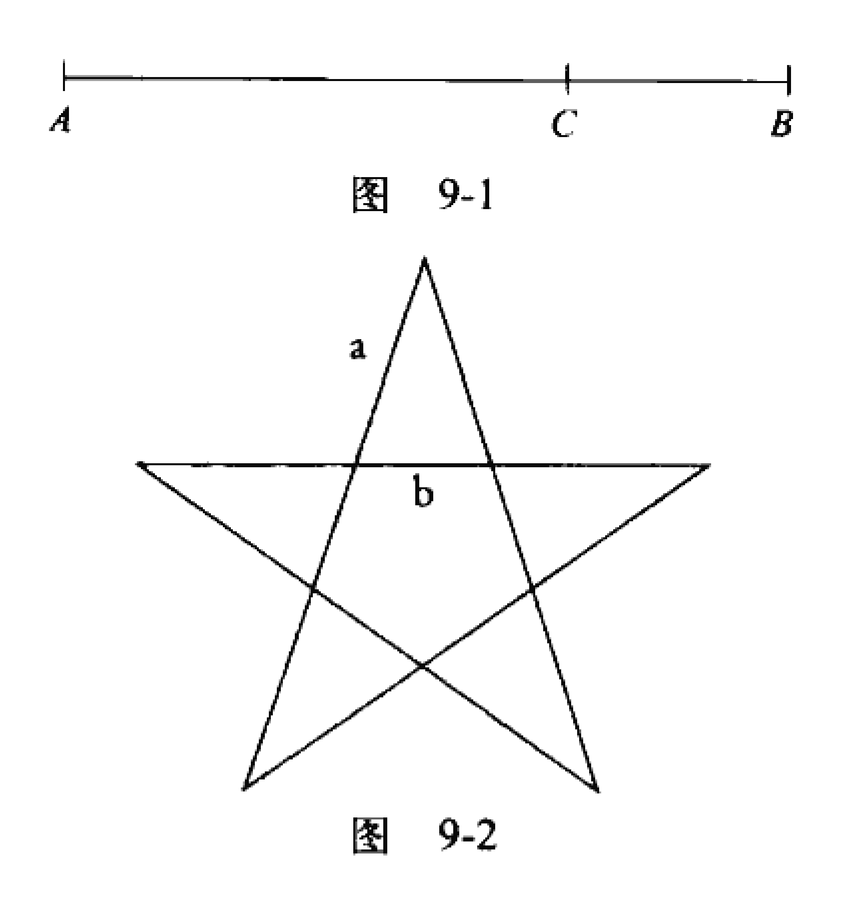


图　9-1

图　9-2

在毕达哥拉斯之后，柏拉图又为黄金分割赋予了新的意义。古希腊人相信宇宙中的所有物质都是由4种基本元素组成：土、火、空气和水。在柏拉图对话录的《蒂迈斯》（*Timaeus*）中，柏拉图用5种符合对称规则的立体来解释物质的结构，它们通常被称为柏拉图立体（platonic solids）。这5种凸面立体是正四面体、立方体（正六面体）、正八面体、正十二面体和正二十面体，这些立体也是仅有的各面都是正多边形、面积都相等的立体（当然是针对每一个单独的立体而言），并且这些多面体每个面的所有顶点都在立体的表面。柏拉图把其中4个立体与宇宙构成的4种基本元素联系在了一起。例如，他认为土是立方体，火是正四面体，气是正八面体，水是正二十面体。关于正十二面体，柏拉图在《蒂迈斯》中写道："对于剩下的第5种复合图形，上帝用它来代表全部，给它绣上精美图案。"也就是说，在柏拉图眼中，正十二面体代表整个宇宙。然而，请注意，正十二面体的每一个面处处都有黄金分割的影子，它的体积和表面积都可以用黄金分割率的公式来表达（正二十面体也是如此）。

历史表明，通过反复试验，毕达哥拉斯学派及其后来者发现了特定几何图形的构成方式。在他们看来，这些几何图形代表着一些重要的概念，例如爱和整个宇宙。那么，毫无疑问，正是他们（毕达哥拉斯学派）和欧几里得（他阐述了这一教义）发明了蕴含于这些结构之中的黄金分割的概念，并给它起了这个名字。与其他比率有很大不同，关于1.618……这个数字在众多历史文献中都有记载，它成了数学研究的中心，并且即使在今天，在一些人们意想不到的领域都能发现它的踪迹。例如，在欧几里得时代的两千年之后，德国天文学家约翰尼斯·开普勒发现在斐波那契数列中，黄金分割比率竟然也神秘地出现了。斐波那契数列是指数字序列1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233……，从第3个数字开始，数列中每一个数字都是它之前的两个数字之和（例如，$2=1+1$，$3=1+2$，$5=2+3$，等等）。如果用这个数列中的一个数除以它前面的那个数（例如，

144÷89，233÷144)，其结果值在黄金分割比率值附近振荡，并且随着数列的延续，这个商也会越来越接近黄金分割比率值。例如，如果只取小数点之后 6 位的话，从斐波那契数列的上述除法中可以得到如下的结果：144÷89＝1.617 978，233÷144＝1.618 0，377÷233＝1.618 026……你能想象到吗，在此之后不久，人们观察发现，在一些植物的叶片排列分布（专业术语叫叶序）和部分铝合金晶体结构中，都有斐波那契数列以及与其相伴的黄金分割比率的影子。

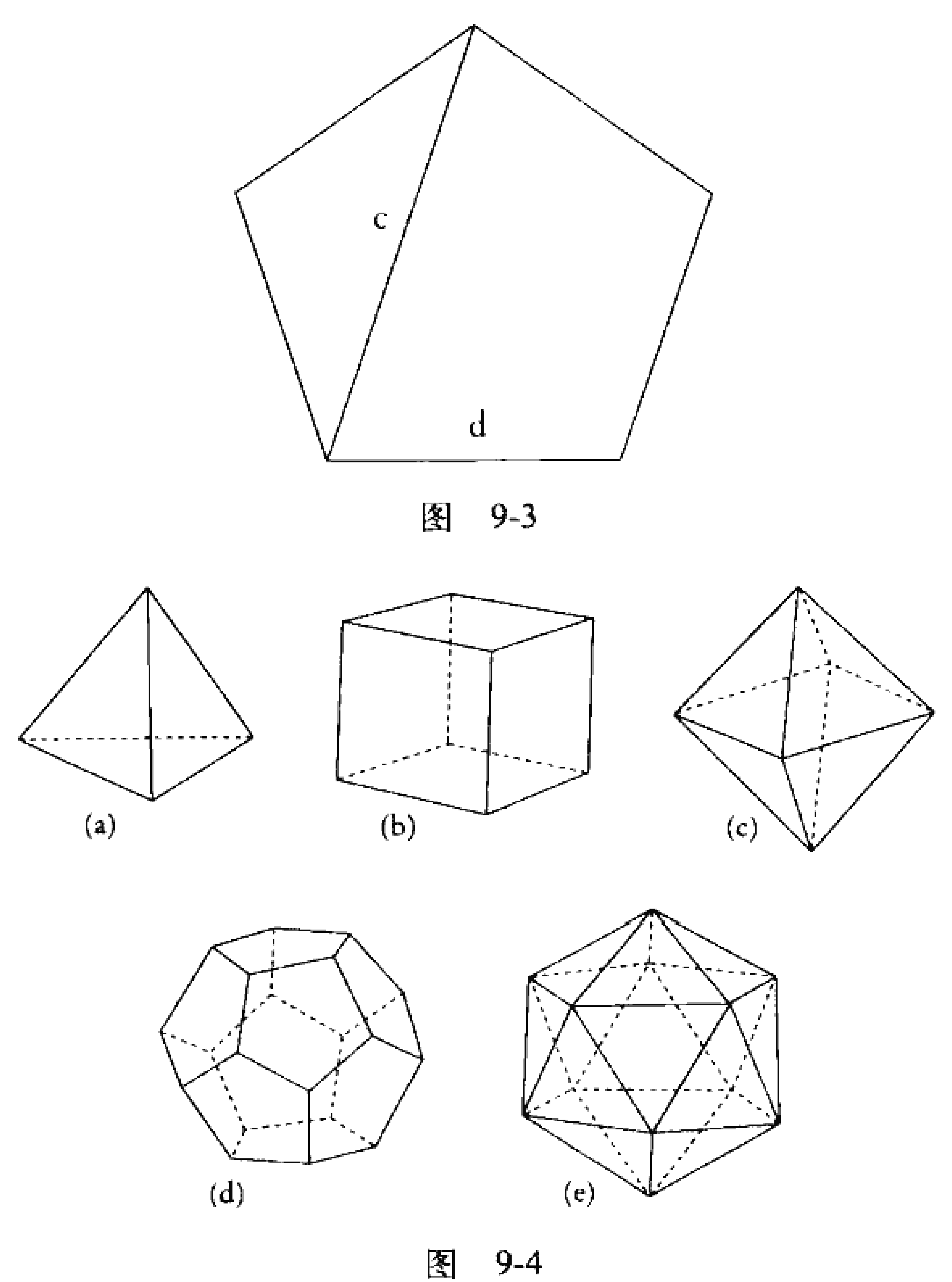


图　9-3

图　9-4

为什么我把欧几里得定义的黄金分割概念看做是发明？这是因为欧几里得用他富有创新的思想，把这个比率挑选了出来，进行了详细的分析，并且成功地吸引了其他数学家的注意。不过，值得注意的是，在中国黄金分割比率的概念却不是发明，目前的数学文献基本上没有对它的相关描述。同样，在古印度黄金分割比率的概念也不是发明，只是在研究三角学的一些无关紧要的定理时，隐约提到了这个比例。

还有许多例子可以证明"数学是发现还是发明"这个问题其实是一个伪命题。数学是发明和发现的结合物！作为一种概念，欧几里得几何学中的公理是发明，正如国际象棋的行棋规则是人类的发明一样。公理又被人类研究发明的概念不断补充，诸如三角形、平行四边形、椭圆、黄金分割比率等。然而，在另一方面，欧几里得几何学中的定理，从总体而言却又都是发现，它们是连接不同概念的桥梁。在某些情况下，证明产生了定理，即数学家研究什么是他们能证明的，并从中总结推演出定理。还有另外一种情况，正如阿基米德在《方法论》中所描述的，数学家首先找出他们感兴趣的特定问题的答案，之后再寻找证据。

一般情况下，概念是发明的。例如，质数是作为一个基本概念[270]被数学家发明的，但是关于质数的相关定理却是人们发现的。在古巴比伦、埃及和中国，尽管当时的数学家们已经发展出了非常先进的数学理论，但他们从来没有提出过质数的概念。我们能说他们只是没有"发现"质数吗？这种说法与我们说大英帝国没有"发现"唯一的、汇编成法典的宪章完全类似！正如一个国家在没有宪法时也能正常运转一样，没有质数的概念，复杂的数学也能不断发展，并且在历史上数学的确也是这样发展的。

是什么原因促使古希腊人发明了作为公理的概念和质数。我们不能确信，但是我们可以猜想这要归功于他们坚持不懈地探索宇宙基本结构的努力。质数是数字的基石，正如原子是物质构成的基础。同样，公理

犹如一口源泉，所有的几何真理都从其中源源不断地喷涌而出。就好像正十二面体代表整个宇宙，黄金分割比例被看做是把这种标志带入现实存在的概念。

这些讨论也使数学的另外一个有趣的方面显现了出来：数学是人类文明的一个重要组成部分。当古希腊人发明了公理法以后，西方所有的后续数学理论都遵循这一方法，并接受了同样的哲学和实践。人类学家莱斯利・怀特（Leslie A. White，1900—1975）曾经试图概括总结数学中体现出的人类文明，他说："假如牛顿是在霍屯督部落（南非的一个原始部落）长大成人的，他的计算能力可能只和霍屯督人一样。"[271]许多数学发现(例如纽结不变量)，甚至某些意义非常重大的发现(例如微积分)，它们都是由多个不同的数学家在独立工作中提出的，这主要归因于数学所体现出的这种文化的复杂性。

你能说数学语言吗

前面我比较了数学的抽象概念与语言文字这两者含义的异同。数学是一种语言吗？不论从数学逻辑的视角分析，还是从语言学角度来看，都可以看出在某种程度上的确是这样的。布尔、弗雷格、佩亚诺、罗素、怀特黑德、哥德尔，还有他们今天的追随者们（特别是在哲学的句法、语义学以及语言学的领域里）已经证明，语法和推理与逻辑符号的代数学密切相关。但是为什么世界上至少有 6500 多种语言，而只有一种数学呢？事实上，所有这些不同的语言都有一些共同的结构特点。例如，美国语言学家查尔斯・霍克特（Charles F. Hockett，1916—2000）在 20 世纪 60 年代注意到所有的语言都有一种内在的、固化的技巧，以使新词或短语能被人们比较容易地接受(例如网站"主页"、"笔记本"电脑等)[272]。同样，所有的人类语言都允许有抽象概念的存在（例如"超现实主义"、"缺乏"、"伟大"），允许有否定的表达（例如"不"、"不可以"），允许提

出基本假设（例如“如果奶奶有轮子，那么她就是一辆汽车了”）。也许在所有语言中最重要的两个属性就是它们的末端开放（open-endedness）和刺激自由（stimulus-freedom）。前者代表语言可以创造出那些我们过去闻所未闻的表述，并且理解这种表述的能力，例如，我可以非常轻易地造出以下这样一个句子：“你不能用口香糖来修胡佛大坝。”也许你过去从来没有听到过这句话，但是你在理解它的意思时却不存在任何障碍。而刺激自由则是指在面对刺激时作出回应的能力[273]。例如，创作性歌手卡洛尔·金（Carole King）在她的歌曲中提出了一个问题：明天你是否依然爱我？答案应当是如下几种：(1) 我不知道明天我是否还活着，(2) 绝对还爱你，(3) 甚至在今天我也不爱你，(4) 不会像爱我的狗那么爱你，(5) 这绝对是你最动听的一首歌，或者甚至是(6) 我想知道今年谁会赢得澳大利亚公开赛冠军。也许，你现在已经发现这里所列举的例子的特征（例如抽象、否定、末端开放以及演变发展的能力）也正是数学的特点[274]。

我在前面提到过，莱考夫和努涅斯十分重视数学中隐喻的作用。认知语言学家甚至认为，所有人类语言都使用隐喻来表达几乎所有的事情。也许更加重要的是，自 1957 年起[正是在这一年著名的语言学家诺姆·乔姆斯基（Noam Chomsky）出版了他那本革命性的著作《句法结构》（*Syntactic Structures*）]。[275]许多语言学家围绕通用语法（universal grammer，指支配所有语言的准则）的概念进行了大量研究。也就是说，那些表面上各不一样的语言，其背后也许隐藏着令人惊奇的相同结构。事实上，如果不是这样的话，那么帮助人们把一门语言翻译为另外一门语言的词典永远都不会起什么作用。

你也许想知道，为什么数学无论是在主题内容上，还是在符号概念上都是统一的。这个问题的前半部分尤其引人关注。大多数数学家都一致认为，我们今天所知的数学起源于由古巴比伦、埃及和希腊人在实践中发展起来的几何和算术，它们是数学最基础的分支。然而，是不是数

学必须从那些特定的学科发展出来？计算机专家斯蒂芬·沃夫曼（Stephen Wolfram）在他的那本煌煌巨著《一种新科学》（*A New Kind of Science*）[276]中提出了相反的观点，他认为这并不是必须的（数学不一定要从古希腊的几何中发展）。特别是，沃夫曼表明通过简单的规则集（它们类似于计算机程序，通常称为细胞自动机），人们可以发展出一门完全不同的数学。这些细胞自动机可以用来作为自然现象建模的基础工具（至少在原则上可以），以替代使用了近3个世纪之久的微分方程。那么是什么促使古代文明打上了数学发现或发明的特定“标记”呢？事实上，我也不是十分清楚，但是这可能与人类感知系统有很大关系。人类可以比较容易地发现和感知边、直线和光滑曲线，请注意，当你看到一条直线时，你能准确地（仅仅用肉眼）判断出它是一条直线吗？或者，你能辨别出圆形和略微有点扁的圆之间的差别吗？这种感知的能力也许极大地塑造了人类对世界的认识经验，并且在此基础上引出了以离散对象（算术）和几何图形（欧几里得几何）为基础的数学。

符号的统一也许有点类似于“微软 Windows 效应”：全世界都在使用微软公司的 Windows 操作系统，不是因为这种统一是不可避免的，而是因为一旦这种操作系统占据了计算机主流市场，所有人都不得不使用它，以便使交流更加容易，并且自己开发出的产品也能被其他人使用。同样的道理，西方的符号标记系统也正是以这样的方式占据了数学世界的支配地位。

有意思的是，天文学家和天体物理学家用一种有趣的方式对“发明”还是“发现”的问题作出了自己的解答。最新研究表明，太阳系外行星中有百分之五的恒星至少有一个巨行星（就好像太阳系中的木星）围绕它在轨道上运行，在整个银河系中，大概也是这个比例数。尽管类地行星（terrestrial）的精确数量目前还不得而知，但在银河系中充斥着类似的行星，数量可能多达数十亿颗。即使是仅仅只有非常小的一部分（但

不是可以忽略的）这类“地球”位于其主星的可居住带（habitable zone，在行星表面能产生液体水的轨道范围）上，在这些行星表面产生生命的概率，特别是产生有智慧的生命的概率还是有的。如果我们发现了另外一种形式的、我们可以与之交流的智慧生命，我们会获得与这种智慧生命发展起的文明有关的信息来解释宇宙。这样我们不仅能在理解生命起源和进化方面取得巨大的进步，甚至还能把我们的逻辑与那些可能比我们还要高级的生物的逻辑体系进行比较。

在宇宙学中有很多推测[例如有一种是永恒膨胀（eternal inflation）]，有些人预测存在多个宇宙。这其中有些宇宙也许不仅自然常量（constants of nature）值（例如力的强度、亚原子微粒的质量比）不同，甚至是整个自然的法则都可能有极大差别。天体物理学家麦克斯·泰格马克认为对于每种可能的数学结构，应当存在一种（按他的话说，是有一种）宇宙[277]。如果他的理论是正确的话，那么这将是“宇宙就是数学”这种观点的终极版本——不是仅仅只有一个宇宙等同于数学，而是所有的宇宙都是如此。不过，这种推测过于激进，并且目前根本无法得到验证，更重要的是它（至少其最简单的形式）似乎与所谓的折中原则（principle of mediocrity）有矛盾[278]。我在第5章中已经描述过了，当你在大街上随机挑选一个人时，这个人的身高与平均身高的差距比标准差小的概率大约是95%。同样的道理也适用于研究宇宙的属性。但是可能的数学结构的数量，会随着复杂性的增加而急剧增长。这就意味着那种最“中间”（最接近平均数）的数学结构不可避免地会极其复杂，而这似乎与数学和宇宙学说的简洁性产生了冲突，不符合一种最自然的期待，即我们的宇宙应当是典型的。

维格纳的难题

“数学是被发明的还是被发现的？”这其实是一个错误的问题，因为

这个问题本身暗示了答案必须是非此即彼的，并且两种可能的答案是相互排斥的。我认为数学有一部分是被发明的，而有一部分是被发现的。通常的情况是，人类发明了数学概念，之后则是发现了这些概念之间的联系。一些以经验观察为基础的发现促成了概念的形成，但是概念本身则毫无疑问刺激了更多定理被发现。我还注意到一些数学哲学家，例如美国数学家希拉里·普特内姆[279]（Hilary Putnam），采用了一种现实主义的中间立场，他们信奉数学发现的客观性（也就是说，命题要么正确要么错误，并且使命题正确或错误的原因是人类以外的因素），而不去评判发现，这有点像柏拉图学派。这些观点和见解能解释维格纳提出的“无理由的有效性”？

让我们先来简要回顾一下同时代的思想家们的主要观点，其中可能提供了问题的答案[280]。诺贝尔奖获得者物理学家大卫·格瑞斯（David Gross）曾经说[281]：

> 有一种观点认为——以我个人的经验来看，在那些非常富有想象力的数学家看来并不是不同寻常的——数学家们所认可的数学结构并不是人类大脑的创造，相反，它们是一种当然，就好像物理学家描述所谓的真实世界时创造的种种结构一样实际存在。也就是说，数学家不是在发明一门全新的数学，他们是在发现它们。如果事实的确如此，那么也许我们正在努力探索的神秘世界（数学那无理由的有效性）将会变得不那么神秘了。如果数学就是关于结构的，关于自然界真实的一部分，正如理论物理的概念一样真实，那么数学在分析现实世界时成为一件有效的工具就一点也不值得惊讶了。

换句话说，格瑞斯在这里信赖的是“数学如同一种发现”这种观点的改版，这种看法介于柏拉图提出的“数学形式的世界”与“宇宙就是

数学”这两种观点之间，但相对而言，更接近于柏拉图主义者的观点。不过，正如我们已经看到的，“数学如同一种发现”这种提法很难得到哲学上的支持。而且，柏拉图主义并不能真正解释我们在第 8 章中讨论过的数学那不可思议的精确性。这也是格瑞斯所承认的[282]。

麦克·阿蒂亚爵士是这样认为的（他对于数学本质的解释中，绝大部分观点是我所赞同的）[282]：

> 如果在进化背景中看待人类大脑的话，那么数学在物理学中取得不可思议的成功至少有一部分是说得通的。大脑进化的目的就是为了更好地理解和对待物理世界，为此发展出了一门语言，也就是数学，来满足这一需要，这并不让人感到惊奇。

这一推理过程与认知科学家提出的观点不谋而合。不过阿蒂亚也承认，这并不能指引人们理解问题中最复杂和困难的那一部分：数学为什么能解释物理世界的种种神秘现象，特别是这种解释完全把我所谓的数学有效性中“主动”的一面（数学概念和理论在被提出之后很久才找到了其应用领域）抛至脑后了。阿蒂亚说：“无神论者能提醒我们，生存的艰辛仅仅需要我们处理人类能力所及的物理现象就足够了，而数学理论却似乎能成功解决从原子到银河之广袤领域内的所有事物。”对此他只是提出：“也许答案在于数学那天然存在的抽象层次中，这种抽象可以让我们比较容易地解释各种问题。”

美国数学家及计算机专家理查德·汉明（Richard Hamming，1915—1998）针对维格纳的问题在 1980 年发起了一场更加宽泛而有趣的讨论[283]。首先，在数学的本质这一问题上，他总结道：“数学是由人类创造的，因此人类可以轻易地不断修改完善。”接着，他对数学无理由的有效性提出了 4 种可能的解释：（1）选择效应，（2）数学工具的进化，（3）有限的数学解释能力，（4）人类自身的进化。

回想一下，选择效应是由使用的仪器或收集数据的方式而造成的实验结果的扭曲。例如，在对某种减肥计划效果进行的测试中，研究者不接受中途退出计划的人，而这会让测试结果产生较大误差，因为中途退出的人极有可能就是该计划根本不起作用的人。换句话说，汉明认为，至少在某些情况下，“最初的现象是源自于我们所使用的数学工具，而不是来自于真实的世界……我们看到的很多事物是来自我们戴的眼镜。”汉明举了一个例子，从三维空间的一个点发出的任何对称的力都应当遵循平方反比定律，因此适用牛顿的引力定律是很自然的。汉明选择效应的观点是可以接受的，但是还是不能解释数学中某些定律那异乎寻常的精确性。

汉明提供的第二条可能答案，取决于人类为符合特定环境而对数学作出的选择和改进。换句话说，汉明提出我们正在见证数学思想的“进化和自然选择”，也就是人类发明了大量的数学概念，只有那些符合特定环境的概念才会被选中。多年来，我一直相信这是一个完美的解答。诺贝尔奖获得者物理学家史蒂文·温伯格在他的著作《终极理论的梦想》（*Dreams of a Final Theory*）中也表达了类似的观点[284]。这真的是维格纳难题的答案吗？毫无疑问，这种选择和进化的确是事实。在仔细筛选多种多样的数学形式和工具后，科学家们保留了那些有效的部分，并且不断地更新和改进，以使它们更好地适应现实需求。但是，即使我们接受了这种思想，数学定理为什么能从根本上解释宇宙呢？

汉明提出的第三个观点是，我们印象中的数学有效性也许是一种错觉，因为我们周围的世界，有相当一部分是数学无法真正解释的。在支持这种观点的人中，我注意到数学家盖尔芳德（Israil Moseevich Gelfand）曾经说过：“在物理学中有一件事是比数学无理由的有效性更加无理由的，这就是生物学中无理由的无效性。”[285]我并不认为这能在本质上解决维格纳的疑问。这并不像《银河系漫游指南》(*The Hitchhiker's Guide to*

the Galaxy)中提到的那样，我们不能说生命、宇宙以及所有事物的答案都是 42。尽管如此，数学的确能够阐明并解释非常多的现象，并且能用数学解释和理解的范围还在不断扩展。

汉明的第四条解释与阿蒂亚爵士的一个观点十分接近，那就是："达尔文进化论自然是适者生存，而这些适者心里对现实的模型一定是最佳的，这里所谓的'最佳'指的是最适宜生存和繁衍的形式。"

苹果公司 Macintosh 项目的启动者、计算机科学家杰夫·瑞斯金（Jef Raskin，1943—2005）[286]，也赞同类似的观点，但他更强调逻辑的作用。瑞斯金总结道：

> 人类逻辑是物理世界强加给我们的，并且因此而与物理世界保持一致。数学源自于逻辑。这就是数学与物理世界一致的原因，这没有什么神秘的。即使这样，我们也不应失去对自然事物的好奇和怀疑，哪怕是在我们可以更好地理解这些事物之后也应如此。

不过，实际上虽然汉明给出了论证，他本人对此仍然不是十分确信，他指出：

> 如果你认为科学已经有 4 000 年历史了，通常这意味着最多经历了 200 代人。考虑一下，寻找进化结果时，在我们的选择中只有小概率的变异体，因此，对我来说，这种进化只能解释很小一部分的数学"无理由的有效性"。

瑞斯金则认为："数学的根基在我们的祖先存在之前就已经存在了，经历了数百万代了。"然而，我必须承认我并不认为这种观点特别可信。即使逻辑的确深深根植于我们祖先的大脑中，也很难看到它可以引领我们得到亚原子世界中的抽象数学理论，例如那精确得不可思议的

量子力学。

值得注意的是，汉明在他的文章结尾处承认：“我所给出的所有解释并不充分，不足以解释我试图解答的问题。”（也就是指数学无理由的有效性）。

因此，我们是否应当承认，数学那无理由的有效性仍然像我们刚开始讨论时的那样保持着神秘，并自此结束本书呢？

在最终放弃之前，让我们通过科学方法，来仔细分析一下维格纳谜题的实质吧。科学家首先是利用一系列实验和观察来认识事实的，这些事实最初被用来创建现象的某种定性模型（例如地球吸引苹果，亚原子微粒的碰撞击能产生其他微粒，宇宙在膨胀，等等）。此时，科学的许多分支还都保持着非数学的形态，即使是新兴理论也是如此。这类具有深远影响的说明性定理中最典型的例子就是达尔文进化论。尽管自然选择并不是基于任何数学形式体系提出的，这一理论在区分物种起源时取得的成功还是让人叹服的。另一方面，在基础物理学中，第二步则通常是从数学角度来构建理论体系，量子定律（例如万有引力、量子电动力学、弦论等理论）就是如此。最后，研究人员利用这些数学模型预测新的现象、新的微粒，甚至是过去从来没有进行过的试验或观察的结果。而令维格纳和爱因斯坦感到迷惑的正是在后两个步骤中数学取得的令人难以置信的成功。究竟是什么原因使得物理学家一次又一次地发现，数学这个工具不仅能解释已经存在的试验结果和观测结论，而且还能产生完全崭新的认识和猜想？

在这里，我用数学家鲁本・赫什的例子来回答这个问题。赫什[287]提出在数学（以及在理论物理学）领域分析类似的问题时，应当仔细检查那些最简单的情况。举个十分浅显的例子，当你往一个不透明的瓶子里放鹅卵石时，假设第一次你往瓶子里放了 4 块白色的鹅卵石，之后你又放了 7 块黑色的鹅卵石。在这个过程中，人类通过自己发明的抽象概

念——自然数，理解了不同颜色的鹅卵石代表的含义。也就是说，白色鹅卵石的数量可以与数字 4 联系在一起（或者是 Ⅲ，或者是 Ⅳ，或者是当时使用的任意符号），同样的道理，黑色鹅卵石的数量与数字 7 联系在了一起。通过这种类型的实验方法，人类还发现了其他已发明的概念（例如算术的加法）代表了当时的某种合计的实际行为。也就是说，由符号 4 + 7 表示的抽象过程，其结果能清楚地预测瓶子中鹅卵石的数量，所有这些意味着什么？它意味着人类发展出了一种非同一般的数学工具，通过这种工具，人类可以可靠地预测这种类型的任何实验结果。但是这种工具并不总是有效，例如，它对水滴的计算就无能为力。如果你往瓶子里滴 4 滴水，之后再滴 7 滴水，很明显，此时瓶子中的水并不是 11 滴。为了解决类似这样的问题，诸如涉及液体或气体的实验，人类不得不又发明出一种完全不同的概念体系（例如重量），并且还意识到他们不得不为每滴水或者是一定容积的气体称重。

到目前为止，我们得到的经验十分清楚。数学工具并不是可随意挑选的，而是根据当时的实验或观察需要来确定的。因此至少在这个非常简单的例子中，它们的有效性得到了保证。人类不必在事先猜测哪种是正确的数学工具，自然界为他们奢侈地提供了反复试验的机会，以最终决定哪种工具是有效的。面对种种纷繁复杂的应用环境，人类通常会有多种选择。有时在面临特定问题时，我们也许找不到合适的数学形式体系（工具）来解决，此时，数学家们就不得不发明出一种全新的数学工具，例如，牛顿为了研究万有引力发明了微积分，现代数学家探索弦论时发明了各种拓扑/几何思想。还有一种情况是，数学形式体系的确已经存在了，但人类在经历了很长时间之后才发现它可以用来解决特定的问题，例如爱因斯坦利用黎曼几何研究相对论，分子物理学家使用群论研究微粒结构。问题的核心是，由于强烈的好奇心、固执的坚守、创造性的想象力，以及勇敢的决断力，人类已经能够找到合适的数学形式体系，

并利用它们为数量庞大的物理现象建模。

对于数学的有效性中的“主动”一面，一个至关重要的典型特征是其本质上的永久正确性。欧几里得几何尽管是在公元前 300 年发展起来的，但它在今天仍然正确。今天我们已经知道，欧几里得几何学中的公理并非是必然发生的，而且，与其说它们代表了空间的绝对真理，还不如说它们表示了特定的、人类意识到的宇宙真相，以及与此相关的人类发明的形式体系。尽管如此，一旦我们更好地理解了其应用范围，欧几里得几何中的所有定律都可以说是正确的。换句话说，一个数学分支成为了另外一个更广泛、更综合的数学分支的一部分。例如，欧几里得几何仅仅只是几何学众多形式中的一种，但是每一个分支都始终正确。正是数学的这种无限的生命力，让数学家们在任何时候，都能从大量成熟的数学形式体系中寻找出满足需要的数学工具。

瓶中的鹅卵石这个非常简单的例子还不能完全解决维格纳难题中的两个基础性要素。首先，这里有一个问题：为什么在某些情况下，我们从理论中得出的精确性要比最先植入到这个理论里的精确性高。在鹅卵石的实验中，“预测的”结果（另外一定数目的鹅卵石的总量）并不比能得出“理论”公式（算术加法）的试验更加精确。还有一种情况，例如，牛顿的引力定律远比推动这一理论发展的实验观察结果更加精确。这究竟是为什么呢？如果你再回顾一下牛顿理论的形成历史，你就会对此有更深入的理解了。

托勒密（公元 2 世纪的希腊天文学家、地理学家、数学家，地心说的创立者）几何模型（即地心说）在近 15 个世纪中一直占据着天文学的主导地位。尽管这一模型并未宣称具有任何普遍适用性（每颗行星的运动都是分别处理和计算的），并且也未提及运动的物理原因（例如力、加速度等），然而，考虑到当时的技术发展水平，人们认同这一模型是合乎情理的。尼古拉斯·哥白尼（1473—1543）在 1543 年发表了他的日心

说，在他之后，由伽利略进一步发展了这一学说，让其更为可信。伽利略还为建立运动法则奠定了坚实的基础。不过，第一位从现象观察中推演出了行星运动的数学规律（虽然仅仅只是现象学的）的却是开普勒。开普勒在研究中使用了大量的天文观测数据，这些数据实际上是天文学家第谷·布拉赫在长年观测火星运动轨道时记录的内容[288]。开普勒把那些数百页的计算称为“我和火星之间的斗争”。事实上，开普勒的研究成果除了有两个地方与事实略有出入之外，他所得出的行星运动的圆形轨道符合所有的观测结论。开普勒本人对他的研究也十分满意，在后来，他还描述了他在研究这一问题时的思维过程：“如果我相信了我们能忽略那 8 分钟的误差（此处指弦度，大约是满月直径的四分之一），我可能早就据此修订了我的假说理论。现在由于不允许忽视这种误差，仅仅只是这 8 分钟就足以指明天文学中翻天覆地的革新。”这种严谨的工作作风产生了巨大的影响。开普勒推断行星的运动轨道并不是一个圆，而是椭圆，并且他还系统地定量分析了其余两条适用于所有行星运动的定律。当这些定律与牛顿的运动定律联系起来以后，它们共同形成了牛顿万有引力的基础。不过，让我们回过头来看一看笛卡儿提出的涡旋理论，这一理论认为作环形运动的粒子形成的涡旋带动行星围绕太阳运动。在牛顿证明这一理论有矛盾之前，实际上它也并未得到广泛认可，因为笛卡儿从来没有为他的涡旋理论发展出一套系统的、能用数学公式表达的完整分析。

从这段简洁的历史描述中我们学到了什么呢？毫无疑问，牛顿的万有引力定律是一件伟大的杰作，但是这一天才的理论并不是凭空产生的。关于这一理论的一些基础性研究，事实上在牛顿之前，已经有一些科学家们为它们付出了艰辛的努力，并且还取得了一定成果。正如我在第 4 章中提到的，当时的一些科学家（当然他们在数学上的造诣没有牛顿那么深厚），诸如建筑学家克里斯多弗·瑞恩、罗伯特·虎克，他们都各自

独立提出了引力与距离成平方反比的关系。然而牛顿的伟大之处在于他以他独一无二的天才能力将所有这些提法和理论放在一起进行思考，以一种统一的形式形成了一套完整的理论体系，更重要的是，他为自己所提出的理论给出了数学证明。为什么这种数学形式体系会如此精确？一部分原因在于它解决了这一课题的基础性问题——两个引力体之间的力及其运动的结果。他没涉及任何其他的复杂因素。针对这一问题，并且仅仅只是针对这一问题，牛顿给出了一个完整的解决方案。从此之后，基础理论的准确性从未改变，不过其适用范围却在不断调整。由于太阳系不是只由两个天体构成，当其他行星的引力作用效应也考虑在内时（仍然是根据平方反比定律），行星的运动轨道将不再只是一个简单的椭圆。例如，人类已经发现地球的运动轨道在宇宙空间中就有微弱的改变，我们称这种运动为旋进（precession），它非常类似于地轴顶端的旋转。实际上，现代天文学研究表明，行星的运行轨道与拉普拉斯的期望正好相反，甚至最终可以看做是无序的[289]。当然，牛顿的基础理论后来被纳入了爱因斯坦的广义相对论，这一理论也是经历了一系列失败之后才形成的。因此理论的精确度无法事先预测，布丁的味道只有在品尝后才能知道，只能经过不断地调整和补充之后才能得到理想的精确的结果。只有很少的理论只经历了一步就达到了令人难以置信的精确度，那简直就是奇迹。

很明显，在这一切背后有一种至关重要的事实使得基础规律的研究是值得去做的。这一事实就是，自然界是被普遍法则所支配的，而不是狭隘的次要法则，这对我们人类太仁慈了。在地球上、在银河系边缘，甚至在距离地球 100 亿光年以外的星系上，氢原子的运动方式都是完全相同的，无论在任何时间，从任何角度观察。数学家和物理学家发明了一种数学术语来说明这种属性，即对称（symmetries），它反映了结论与观测的位置、角度和时间无关。如果不是对称的话，是不可能理解自然

规律的，因为试验不可能在空间中的任何一点进行重复（假设生命在宇宙中的每个地方都会出现）。隐藏在数学理论背后的另外一项关于宇宙的特征是位置（locality），它反映了我们构建“特宽银幕电影”的能力（类似于拼七巧板），源自对基本粒子间最基础的交互的描述。

现在我们来看维格纳难题的最后一条：究竟是什么原因从根本上保证了数学理论能够持久存在？换句话说，为什么有广义相对论？是否不存在数学的引力理论？

答案事实上比你想象的要简单[290]。其实没有什么能保证！有许多现象是不可能作出精确预测的，哪怕只是大体上精确。例如，各种混沌的动态系统中，仅仅只是初始条件的微小变化，都可能会导致产生完全不同的最终结果。从股票市场价格的起伏、落基山脉上空的气候变化、小球在轮盘赌转轮间的反弹、香烟烟圈在空气中的飘曳，还有行星在太阳系中的轨道运动，这些现象都不可能精确预测。这并不是说数学家没有发展出精微的形式体系来处理这些问题的重要方面，但是，确定的预测理论的确不存在。其实我们创造的整个概率论和统计学处理的就是那些当前没有精确的理论作为指导的领域内的问题。科学家提出了一种计算的复杂性的概念，用来描述人类运用实用运算法则解决问题的局限，而哥德尔的不完全性定理也同样表明了数学本身的局限性。也就是说，数学在某些学科中特别有价值，尤其是在一些基础性学科领域内更是如此。但是，必须看到，数学也不是万能的，它不是从所有方面都能描述清楚我们周围的宇宙。从某种程度上讲，科学家们是在选择那些可以从数学上进行抽象和处理的问题进行深入研究。

那么，到目前为止，我们是不是已经完全解释清楚了数学那种神秘的无理由的有效性呢？可以肯定地说，我已经竭尽全力、尽我所能了，不过我对于效果如何仍然感觉忐忑不安，说句老实话，我完全不能确信每个人都能被我在本书中所表达的观点说服。不过在这里我觉得可以引

用罗素在《哲学的问题》（*The Problems of Philosophy*）中的一段话[291]来表达我此时的心情：

> 因此，如果要总结哲学价值的话，可以说，哲学是用来研究的，而不是用以寻找它所提问题的确切答案，因为没有一种确定的答案可以能被当做亘古不变的真理，相反，哲学本身就是寻找问题。正是这些问题拓展了我们对可能性这种概念的了解，丰富了我们的智慧想象，并且使我们对于事物的理解不那么固执己见。更重要的是，通过哲学思考，可以认识到宇宙的伟大之处，同时人类的思维也变得伟大，并且有能力与宇宙统一为一体。

注　　解

第 1 章

[1] 琼斯，1930 年。
[2] 爱因斯坦，1934 年。
[3] 霍布斯，1651 年。
[4] 彭罗斯在 *Emperor's New Mind* 和 *Road to Reality* 等书中对这 3 个世界有非常精彩的讨论。
[5] 维格纳，1960 年。在本书中，我们将会多次引用这篇文章。
[6] 哈代，1940 年。
[7] 关于哈代-温伯格定律的详细讨论请参阅海德里奇（Hedrich）在 2004 年的一个例子。
[8] 柯克斯在 1973 年发明了著名的 RSA 加密算法，但在当时它是国家机密。在此之后不久，这一算法又被麻省理工学院的里弗斯特（R. Rivest）、沙缪尔（A. Shamir）和阿多尔曼（L. Adleman）独立地研究了出来。请参阅里弗斯特、沙缪尔和阿多尔曼在 1978 年的著述。
[9] 一种流行的对称描述、群论，以及这一理论在发展过程中的种种纠葛在《无法解释的等式》（*The Equation That Couldn't Be Solved*，李维，2005 年）、一书中进行了讨论，还有 Stewart 在 2007 年、Ronan 在 2006 年、Du Sautoy 在 2008 年的著述也讨论过。
[10] 格莱克（Gleick）在 1987 年对混沌理论的出现有精彩的描述。
[11] 布莱克和斯科尔斯，1973 年。
[12] Applegate 等人在 2007 年对这一问题给出了非常出色并且极其专业的解答。
[13] 尚热、孔涅，1995 年。
[14] 加德纳，2003 年。
[15] 阿蒂亚，1995 年。
[16] 尚热、孔涅，1995 年。
[17] 华莱士和华勒钦斯基（Wallechinsky）在 1975 年至 1981 年，对马乔里・弗

莱明的生平有简短的记述。

[18] 斯图尔特，2004年。

第2章

[19] 关于笛卡儿的贡献在第4章中将会有进一步的描述。

[20] 笛卡儿，1644年。

[21] 亚姆利库，大约公元300年（a、b）；加思里在1987年讨论这一点。

[22] 拉尔梯乌斯（Laertius），约公元250年；波尔菲里（Porphyry），约公元270年；亚姆利库，约公元300年（a、b）。

[23] 亚里士多德，约公元前350年；伯克特（Burkert）在1972年讨论了这一点。

[24] 希罗多德，公元前440年。

[25] 波尔菲里（Porphyry），约公元270年。

[26] 关于毕达哥拉斯学派观点请参阅斯特罗迈耶（Strohmeier）和韦斯特布鲁克（Westbrook）在1999年的讨论。

[27] 斯坦利，1687年。

[28] 威尔斯（Wells）在1986年编写了一个小册子，对数字的那些令人着迷的特点进行了专门分析。

[29] 引自Heath的著述，1921年。

[30] 亚姆利库，约公元300年（a）；加思里在1987年进行了讨论。

[31] 斯特罗迈耶、韦斯特布鲁克，1999年；斯坦利，1687年。

[32] Heath在1921年对这个词在不同历史时期的确切含义进行了详细分析。士麦那（Smyrna，古代小亚细亚西海岸一城市，现为土耳其伊兹密尔）的数学家赛翁（Theon，约公元70—135）在《数学，理解柏拉图的关键》（*Mtahematics Useful for Understanding Plato*）一书中对这个词有十分形象和生动的描写。

[33] 您也许已经注意到了，在普罗克洛斯的评论中，他并没有专门提到他本人是不是相信这一定理是否真的由毕达哥拉斯第一个发现。关于献祭公牛的故事出现在拉尔梯乌斯、波尔菲里，以及历史学家普鲁塔克等人的笔下。这个故事来自于阿波罗多罗斯（Apollodorus）的诗歌。然而，这些诗歌只提到了“那条著名的命题”，并没有说命题是什么。拉尔梯乌斯，公元250年；普鲁塔克，公元75年。

[34] Renon和Felliozat，1947年；van der Waerden，1983年。

[35] 这种宇宙起源论基于一种观点，该观点认为现实存在来自于结构（被认为是有限的）对物质（被认为是无限的）的决定性影响。

[36] 莫里斯（Morris），1999 年。

[37] Joost-Gaugier，2006 年。

[38] 关于毕达哥拉斯学派的贡献及其影响，赫夫曼（Huffman）在 1999 年、Riedweg 在 2005 年、Joost-Gaugier 在 2006 年、赫夫曼在 2006 年在斯坦福哲学百科全书中有非常全面的讨论。

[39] Fritz，2005 年。

[40] 在这本书里我不打算讨论有关无限的概念以及康托和（Dedekind）等人的研究，Aczel（2000 年）、Barrow（2005 年）、Devlin（2000 年）、Rucker（1995 年）、华莱士（2003 年）对这部分内容有十分精彩的分析。

[41] 亚姆利库，大约公元 300 年左右（a、b）。

[42] 请参阅 Netz 在 2005 年的研究。

[43] 怀特黑德，1929 年。

[44] 当然，关于柏拉图的这个话题以及他的思想可以写整整一章。这里我只把撷取了那些对本书讨论的主题有帮助的内容。关于柏拉图的生平，请参阅：Hamilton 和 Cairns 在 1963 年、Havelock 在 1963 年、Gosling 在 1973 年、Ross 在 1951 年、Kraut 在 1992 年的著作。关于他的数学思想，请参阅：Heath 在 1921 年、Cherniss 在 1951 年、Mueller 在 1991 年、Fowler 在 1999 年、Herz-Fischler 在 1998 年的著述。

[45] 这场演讲发生在公元 362 年，但是在演讲中并没有说明石碑铭文的具体内容。Aelius Aristides 手稿一处不起眼的地方记录了铭文的文字内容。这段笔记也许来自于公元 4 世纪的演讲家 Sopatros，Andrew Barker 把它翻译了过来，大体是："在柏拉图学院大门前有一块石头，上面刻着'非几何学者不得入内'，（这是）'不公平'和'不公正'的替代，因为几何追求的就是公平和公正。"这段笔记似乎暗示了在那神圣之地，柏拉图的石碑铭文用"非几何学者"代替了"不公平或不公正的人"（"不公平和不公正的人不得入内"）。这个故事后来在公元 6 世纪的亚里山大哲学家们那里至少被重复了 5 次，并且最终被 12 世纪的博学家 Johannes Tzetzes（大约 1110—1180）记载在 *Chiliades* 中。进一步的详细描述请参阅 Fowler 在 1999 年的著述。

[46] 对于这一系列失败的考古发掘，请参阅 Glucker 在 1978 年的著述。

[47] Cherniss，1945 年；Mekler，1902 年。

[48] Cherniss，1945 年；Proclus，约 450 年。

[49] 柏拉图，约公元前 360 年。
[50] 华盛顿，1788 年。
[51] 关于这个寓言，Stewart 在 1905 年有非常有趣的讨论。
[52] 关于柏拉图主义以及它在数学哲学中的地位，Tiles（1996）、Mueller（1992）、怀特（1992）、罗素（1945）和泰特（1996）等人有非常有趣的讨论。Davis（1981）、Hersh（1981）和 Barrow（1992）对这个问题以通俗的语言作过非常精彩的报告。
[53] 关于这一问题的讨论请参阅 Mueller 的著述（2005）。
[54] 柏拉图对天文学的评论和对行星运行的观点集中体现在《理想国》、《蒂迈欧篇》和《法律篇》中。G. Vlostos 和 I. Mueller 分别在 1975 年和 2005 年讨论了柏拉图观点的含义。
[55] 这本小说是《彼得叔叔和哥德巴赫猜想》，作者是 A. K. Doxiadis（2000）。
[56] 对于这个命题的详细讨论请参阅 Ribenboim 的文献（1994）。
[57] 我将在第 9 章进一步讨论这些观点。
[58] 贝尔，1940 年。

第 3 章

[59] 亚里士多德，大约公元前 330 年；也可参阅 Koyre 的文献（1978）。
[60] 伽利略，1589 年～1592 年。
[61] 关于数学与逻辑的问题我将在第 7 章集中讨论。
[62] 贝尔，1937 年。
[63] 这是在对数学家 Eutocius（约公元 480—540）所著的《对圆周的测量》（*Measurement of a Circle*）一书的评论里提到的。参阅海伯格的著作（1910～1915）。
[64] 普鲁塔克，约公元 75 年。
[65] 阿基米德的出生时间一般是根据公元 12 世纪拜占庭帝国的作家 Johannes Tzetzes 在 *Chiliades* 一书中的提法确定的。
[66] Dijksterhuis 在 1957 年考证了这段历史。
[67] 罗马建筑学家 Marcus Vitruvius Pollio（公元前 1 世纪）在他的专著 *De Architecture* 中讲述了这个故事。他说阿基米德在水中分别放入了与王冠等重的一块金子和一块银子。他发现，把王冠浸入水中时溢出的水比放入黄金时溢出的要多、但比放入白银时溢出的要少。从溢出的水的体积，就很

容易地计算出王冠中黄金和白银的比例。因此，与传说相反，阿基米德并不需要流体静力学知识就解决了王冠的问题。

[68] 托马斯·杰斐逊在1814年给M. Correa de Serra的一封信中写道："人类最佳的看法，正如阿基米德的杠杆，如果给一个支点的话，就能撬动地球。"拜伦是在他的《唐璜》中提到这句名言的。约翰·肯尼迪在他的竞选演讲中引用了这句话，这场演讲全文刊登在了1960年11月3日的《纽约时报》上。马克·吐温在他1887年的一篇名为"阿基米德"的文章中使用了这句话。

[69] 麻省理工学院的一个由学生组成的研究小组在2005年11月试图再现阿基米德用镜子把战船点燃的故事。他们中的一部分人甚至在电视秀 *Myth Busters* 中重复了这一试验。这些试验的结论似乎并不具有说服力，学生们最终设法让战船自燃起来了，但并没有产生足够的火势。事实上，相同的试验在2002年也进行了一次，当时是在德国，研究人员用了500面镜子，把一艘船的船帆给点燃了。在Michael Lahanas的网站上有用镜子引燃物体的讨论。

[70] 这段描写十分生动的文字来自于公元12世纪拜占庭帝国的作家Johannes Tzetzes在 *Chiliades* 一书中的记载。参阅Dijksterhuis的著述（1957年）。普鲁塔克只是十分简略地说，阿基米德拒绝跟那位罗马士兵去见他们的主帅马塞卢斯，他要把他正在研究的问题解出来。

[71] 怀特黑德，1911年。

[72] 关于阿基米德的研究工作，在《阿基米德的成就》一书中有非常精彩的描写，Heath（1897年）。除此之外，Dijksterhuis（1957）和Hawking（2005）也有出色的叙述。

[73] Heath（1897年）

[74] 关于这段历史，Netz和诺埃尔（2007）有非常生动的描写。

[75] 大约在公元975年。

[76] Netz和诺埃尔（2007）。

[77] 威尔·诺埃尔（Will Noel）是这一项目的负责人，他安排我与William Christens-Barry、Roger Easton以及Keith Knox会面。这个项目小组设计了窄带影像系统，并且还发明了利用这一系统确定影像中真实文本的算法。影像处理技术在研究人员Anna Tonazzini、Luigi Bedini和Emanuele Salerno的努力下得到进一步发展。

[78] Dijksterhuis，1957年。

[79] 关于微积分的历史以及它的重要意义，Berlinski（1996）有非常精彩的描写。

[80] Heath，1921年。

[81] 普鲁塔克，约公元75年。

[82] 西塞罗，公元前1世纪。关于西塞罗著作的文本结构、使用修辞、象征意义，请参阅 Jaeger（2002）的研究分析。

[83] 大家所熟知的关于伽利略生平的传记是 S. Drake 的《工作中的伽利略》(*Galilei at Work*, 1978)。还有一本流传更加广泛的是由 J. Reston 所著的《生活》(*A Life*, 1994)。也可参阅 Van Helden 和 Burr 的著述（1995）。伽利略所有的研究请参阅 Favaro 的著作（1890～1909）。

[84] 《小平衡》，伽利略，1586年。

[85] 伽利略，1589年～1592年（1600a 和 1600b）。C. B. Schmitt（1969，在 D. A. Maklich 之后）曾认为伽利略的这种说法，是因为当他手握铅球时，要比手握一个木球更容易感到手酸，所以他在松手时，铅球会比木球更快地从手中滑落。对于伽利略关于下落物体的正确观点，Frova 和 Marezana 在1998年进行了成功的实验。对伽利略在物理学上的研究，Koyre 在1978年有精彩的讨论。

[86] 关于伽利略的实验方法和思维过程请参阅 Shea（1972）和 Machamer 的著述（1998）。

[87] 伽利略，1582年～1592年。伽利略在 De Motu 中评论了亚里士多德（1600a、b）。

[88] 对于维吉尼亚的故事，在 Dava Sobel 的《伽利略的女儿》（1999）一书中有详细的记载。

[89] 伽利略，1610a、b。这些研究实际上最终导致望远镜的发明，Reeves（2008）对这段历史有生动的描写。

[90] 诺埃尔·斯维德劳，1998年。关于伽利略利用望远镜观察发现的详细叙述，请参阅 Shea（1972）和 Draker（1990）。

[91] 对伽利略在天文学上的发现以及望远镜发展历史，Panek（1998）有非常生动和精彩的描述。

[92] 关于伽利略对哥白尼学说的丰富，Shea（1998）和诺埃尔·斯维德劳（1998）有非常透彻的分析。

[93] 这封信本来是写给托斯坎驻布拉格的大使的，但是伽利略误把这个由颠倒字母顺序而构成的信寄给了开普勒。

[94] 事实上，开普勒在给伽利略的信中写道：“我放弃了揣测你信中要表达的真

实意思，这花费了我太多时间。对你而言，你所使用的是真正的德国文字。你的沉默让我感到十分焦虑。”引自 Caspar,1993。

[95] Shea（1972）对这段历史有十分生动的描述。

[96] 这首诗的原文是拉丁文。托玛斯·斯格特曾经是伽利略在帕多瓦的一位学生。这首诗出现在 Favaro 的 *Le Opere* 一书中。关于这首与望远镜有关的小诗的详细讨论请参阅 Nicolson 的《现代语言学》(1935)。

[97] Curzon，2004 年。

[98] 乔治奥·科瑞西奥，1612 年。引用自 Shea（1972）。

[99] 请参阅在温迪·格拉齐亚所著的 *Considerazioni*（1612）一书，在 Favaro 撰写的 *Opera di Galileo* 第四卷 385 页中再次引用。

[100] 引用自 Shea（1972）。

[101] 这场关于太阳黑子的论争，Van Helden（1996）和诺埃尔·斯维德劳（1998）有非常完整和精彩的描述。也可参阅 Shea 的著作（1972）。

[102] 伽利略，1623 年。

[103] 伽利略的所有著作都是由 Antonio Favaro 编辑的，他发现马里奥·古德西奥的绝大部分手稿（包括信件）的笔迹都是伽利略本人的。

[104] 格瑞斯，1619 年。

[105] 伽利略，1623 年。

[106] 伽利略，1638 年。

[107] 关于伽利略对待科学和圣经的看法，Feldberg（1995）和 McMullin（1998）有非常精到的分析。

[108] 参阅 von Gebler 的著作（1879）。

[109] 神学家 Melchor Cano 在 1585 年声称“不仅每一个，而且每一个逗号（圣经的）都是由圣灵提供的。”引自 Vawter（1972）。

[110] 更详细的描述请参阅 Redondi 的著作（1998）。

[111] 伽利略，1632 年。

[112] de Santillana，1955 年。

[113] de Santillana，1955 年。

[114] Beltrán Mari，1994 年。也可参阅 Frova 和 Marenzana 在 1998 年的讨论。

第 4 章

[115] 引自 Sedgwich 和 Tyler，1917 年。

[116] 关于笛卡儿生平的传记可谓数不胜数。最经典的是由 Baillet（1691）撰写的。其他比较有参考价值的是 Vrooman（1970），以及 Rodis-Lewis（1998）。Bell（1937）的记叙非常简练但又十分生动。还有 Finkel（1998）、Watson（2002）和 Grayling（2005）等人有趣的描写。

[117] 毫无疑问，笛卡儿那天遇到的就是艾萨克·比克曼，不过比克曼在他的日记中从来没有提过这个写在木板上的问题。比克曼只是说笛卡儿"竭尽所能地证明在现实里不可能有天使"。

[118] 参阅 Gaukroger（2002）的描述。

[119] 大多数传记作者认为笛卡儿那天晚上是在 Neuburg 省的 Ulm 镇。笛卡儿本人在他的笔记本上记录了这个故事，据说他的一些早期的传记作者曾经见到过这个笔记本。不过只有很少的几段文字幸存至今。笛卡儿在他的 *Discourse* 一书中重现了他对这个梦的印象（Adam 和 Tannery，1897～1910）。对于笛卡儿的这个梦的全面分析以及它可能的解释请参阅 Grayling（2005）和 Cole 的著作（1992）。

[120] 这封信是写给 Pierre Chanut 的，他当时是法国驻瑞典大使，同时在哲学方面也有一定研究。参见 Adam 和 Tannery 的著作，（1897～1910）。

[121] 笛卡儿最初被安葬在 Nord-Malmoe 的一处墓地中。当他的遗骸被送回法国时，有谣传说（Adam 和 Tannery，1897～1910）笛卡儿遗骸的一部分，特别是他的头盖骨仍然在瑞典。笛卡儿的遗骸送回法国后，先是葬在 Sainte-Genevieve 修道院，后来又放在 Petits-Augustines 女修道院。最终，被安葬于圣日尔曼·德普瑞凯斯（Saint Germain des Prescathedral）的一所附属小教堂内，也就是今天的 Saint-Benoit Chapel。我好不容易才找到它，因为我不能相信笛卡儿不是被完整地安葬的。

[122] 参阅 Balz（1952）。

[123] 关于笛卡儿经典和权威的研究，是 Adam 和 Tannery（1897～1910）汇编的，我对笛卡儿的大多数引用都是来自于他们。很多现存的文稿被翻译为了单行本，例如 Veithch（1901）的《笛卡儿哲学思想》，它包括《笛卡儿方法》、《沉思录》、《哲学规律》。关于笛卡儿的科学哲学请参阅 Clarke 的著作（1992）。

[124] 对于笛卡儿哲学的深入研究请参阅 Cottingham 的著作（1986）。关于笛卡儿的"我思，故我在"哲学讨论请参阅 Wolterstorff（1999、Ricoeur（1996）、Sorell（2005）和 Curley（1993）的著作。

[125] 笛卡儿，1637 年。这本书的一个完整版本是由 P. J. Olscamp 在 1965 年编辑

出版的，《几何》还包括了它初版时的摹本，被翻译为《笛卡儿几何》（是由 D. E. Smith 和 M. L. Latham 翻译的）。

[126] Rouse Ball（1908）对笛卡儿在数学上的成就有非常精到的归纳和总结。关于笛卡儿的生平和他的研究，Aczel（2005）也有十分精彩和通俗的描写。Gaukroger（1992）对笛卡儿代数所表现出的抽象有十分很透彻的分析。

[127] 笛卡儿十分坚定地相信“自然法则”是存在的，这一点可以从他在 1632 年 3 月写给梅森的信中看出来，在这封信中，他写道：“现在我正在大胆地探寻所有恒星固定于一个确定位置的原因。尽管它们的分布看起来是不规则的，遍布宇宙的各个角落，但是我确信在它们之间有一种规则的，并且是决定性的自然秩序。”

[128] 请参阅 Adam 和 Tannery（1897－1910），还有 Miller 的著作（1983）。Garber（1992）对笛卡儿在物理学上的研究进行了详细讨论。关于笛卡儿自然哲学思想请参阅 Keeling 的著作（1968）。

[129] 这座纪念碑是在 1731 年建造的，它出自于 Willian Kent 和佛兰德雕塑家 Michael Rysbrack 之手。在牛顿塑像的肘部垫着几本他的著作，雕塑中几个小孩象征着牛顿最主要的发现。除了石棺，还有一个是金字塔形的结构，中间安放着一个球体，上刻画着拂晓的星辰以及 1681 年彗星运动的轨迹。

[130] 今天我们已经无法确定牛顿这句话的真实意思是不是对虎克进行侮辱。Merton（1993）发现“站在巨人的肩膀上”在牛顿那个时代是一种十分普遍的表达。

[131] 牛顿的所有信件都被 Turnbull、Scott、Hall 和 Tilling（1959－1977）收集全了，这真是让人感到难以相信。

[132] 牛顿的几本传记都描写了他与虎克之间的恩怨，包括 Westfall（1983）、Hall（1992）和 Gleick（2003）的著作。

[133] 虎克在 1674 年发表的一篇散文中写到了引力：“在物体运动时，当越接近它们的中心，吸引力就会越强大。”很明显，虎克对引力的直觉感受是正确的，但是他没有从数学角度去表述他的直觉。

[134] 对于牛顿的《原理》有很多非常优秀的译本，包括 Motte（1729）、Cohen（1999）、Whitman（1999）的著作。最常见的是 Chandrasekhar 在 1995 年编辑出版的版本，其中附有很多十分有价值的注解。对于牛顿的引力定律和这一定律的历史，Girifalco（2008）、Greene（2004）、Hawking（2007）和 Penrose（2004）都有十分详细的讨论。

[135] 牛顿，1730 年。

[136] 威廉·史塔克利，1752 年。除了完整的传记外，他还写了一些关于牛顿生活及与他有关的一些故事。我参考了德摩根（1885）和 Crait（1946）的笔记。

[137] David Brewster 在 1831 年为牛顿所写的一部传记中提到："这棵著名的苹果树，据说从它上面掉下的一个苹果引起了牛顿的注意，促使牛顿思考万有引力，最终在 4 年前的一场大风中给吹倒了，不过 Turnor 爵士（牛顿在 Woolshorpe 所住房屋的所有人）把它做成了一把椅子。" Brewster，1831 年。

[138] 关于牛顿学习数学的经历，Hall（1992）给出了很好的描述。

[139] 这封备忘录收藏在朴茨茅斯（英国的一座港口城市）档案馆。那里还有其他一些文献，它们证明了牛顿的确在大瘟疫期间就已经开始思考引力与距离的平方反比定律。参阅 Whiston 的著作（1753）。

[140] 对于牛顿推迟了他宣布发现了万有引力定律的原因，请参阅 Cauori（1828）和 Cohen（1982）的著作。在本书的下一部分我将给出我本人认为最可信的两条原因。

[141] 棣莫弗的这段描写，回忆了牛顿对他的描述。

[142] Cohen，1982 年。

[143] 葛拉雷，1888 年。

[144] 牛顿在他的《原理》一书中说："上帝的无所不在，不仅表现在想象中，也表现为物质上……他代表了所有的眼睛、所有的耳朵、所有的大脑和所有的手臂，是一切感知、一切理解、一切行为的根源。" 牛顿完成于 1700 年左右的手稿是 Sotheby（1936）年发现的，2007 年在 Jerusalem 展出，牛顿在书中利用圣经中的《但以理书》中的描写来计算世界末日的具体日期。你能相信吗，根据牛顿的计算得出的结论，世界将在 2060 年前毁灭。

[145] 关于这些争论的历史，以及各理论的逻辑正确性，请参阅 Dennett（2006）、Dawkins（2006）和 Paulos（2008）的著作。

[146] 请参阅 Dennett（2006）、Dawkins（2006）和 Paulos（2008）。

第 5 章

[147] 关于微积分以及其应用请参阅 Berlinski（1996）、Kline（1967）和 Bell（1751）的著作。Kline（1972）的著作更加偏向专业性，但也是难得的佳作。

[148] 关于这个著名家族的成就，请参阅 Maor（1994）和 Dunham（1994）的著作。也可以从巴塞尔大学的网站上"伯努利篇"（德语）得到更详细的内容（http://www.ub.unibas.ch/spez/bernoulli.htm）。要想得到英文的介绍，请浏览

http://www.springer.com/cda/content/document/cde_downloaddocument/bernoulli2005web.pdf?SGWID=0-0-45-169442-0。

[149] 请参阅 Hellman（2006）。

[150] 关于这个问题以及 Huygen 的解答，Bukowski（2008）有非常详细的描述。对于伯努利、莱布尼兹以及 Huygen 的解决过程，请参阅 Truesdell 的著作（1960）。

[151] 引自 Truesdell（1960）。

[152] 拉普拉斯，1814 年（由 Truscot 和 Emory 在 1902 年翻译）。

[153] 关于格兰特的生平和他的研究请参阅 Hald（1990）、Cohen（2006）和格兰特（1662）的著作。

[154] 哈雷的论文于 1956 年在 Newman 的著作中重印出版。

[155] 引自 Newman（1956）。雅各布・伯努利的研究请参阅 Todhunter 的著作（1865）。

[156] 关于奎特莱特的生平和他的研究，有两本写得非常好的书，它们分别是由 Hankins（1908）和 Lottin（1912）所著。还有一些篇幅稍小，但信息量却很大的著作可供参考，如 Stigler（1997）、Kruger（1987）和 Cohen（2006）的著作。

[157] 奎特莱特，1828 年。

[158] 奎特莱特在他的备忘录中写道："如果平均人(特征)是由一个民族确定的，他就代表了这个民族；如果平均人（特征）是由人类确定的，那么他将代表人类这个种族。"

[159] 关于高尔顿和皮尔森的研究，请参阅 Kaplan 的著作（2006）。

[160] 对于概率论的出现、历史发展、现实应用，有许多非常精彩和生动的描述，请参阅 Kaplan（2006）、Connor（2006）、Burger 和 Starbird（2005）、Tabak（2004）的著作。

[161] Todhunter，1865 年。Hald，1990 年。

[162] 关于概率论的理论核心，Kline（1967）有非常生动、通俗、简短而又透彻的分析。

[163] 有关概率论和我们日常生活密切相关的例子，请参阅 Roesnthal（2006）的生动描写。

[164] 请参阅 Orel（1996）所写的传记。

[165] 孟德尔，1865 年。这篇论文的英文版本可以在 R. B. Blumberg 创建的网站上查到：http://www.mendelweb.org。

[166] 请参阅费雪尔（1936）。

[167] 关于费雪尔的研究请参阅 Tabak (2004)。费雪尔在 1956 年为此写了一篇名为“Mathematics of a Lady Tasting Tea”的文章，用一种浅显、通俗的语言表述了这个问题。

[168] 伯努利 1713 年出版了一个很好的译本。

[169] Newman（1956）重印了一版。

[170] 这篇名为《赌博的堕落和保险的美德》的文章出现在 Newman 的著作中（1956）。

[171] 这本小册子是乔治·贝克莱尔在 1734 年完成的。David Wilkin 在网络上重新编辑并发表了这个小册子。

第 6 章

[172] 托夫勒，1970 年。

[173] 休姆，1748 年。

[174] 根据康德的观点，哲学的一项最基础的任务就是解释数学概念综合的、先验的可能性。在众多参考资料中，我重点参考了 Hoffe（1994）和 Kuehn（2001）对一般概念的分析。关于数学的应用性请参阅 Turdeau（1987）的讨论。

[175] 康德，1781 年。

[176] 关于欧几里得几何和非欧几何的引入，Greenberg（1974）进行了有一定深度的讨论。

[177] 不使用第五假设进行数学定理证明的详细讨论，请参阅 Trudeau 的著作（1987）。

[178] 关于这些疑问最终导致非欧几何的诞生，请参阅 Bonola 的著作（1955）。

[189] George Bruce Halsted 在 1891 年将罗巴切夫斯基的“对于平行线定理的几何研究”翻译为英文，请参阅 Bonola 的著作（1955）。

[180] 关于波约的生平和他的研究，请参阅 Gray 的著作（2004）。在本书中我没有收录哈诺斯·波约画像，主要原因是据称是他的肖像至今仍有人怀疑不是波约本人。不过波约有一幅更加可信的肖像，也是唯一的一件作品，是在 Marosvasarhely 的文学宫正厅展示的一件浮雕。

[181] 这本书有一个拉丁文版本的影印本，还有一个由 George Bruce Halsted 翻译的英译本，请参阅 Gray 的著作（2004）。

[182] 关于高斯的生平和他的研究，Dunnington（1955）有十分深入的研究。Kline（1972）对罗巴切夫斯基和波约的思想有一段十分简洁，但却非常精到的分析。关于高斯对非欧几何的回应请参阅 Ewald 的著作（1996）。

[183] 这场演讲文稿的英译版本，以及其他几篇极为重要的关于非欧几何的论文，还有一些非常有指导意义的笔记，请参阅 Pesic 的著作（2007）。

[184] 亨瑞・庞加莱，1891 年。

[185] 卡尔达诺，1545 年。

[186] 沃利斯，1685 年。对于沃利斯的生平及其研究，Rouse Ball（1908）有过简洁的介绍。

[187] 对于这段历史，Cajori（1914）简要分析过。

[188] 这篇文章收录于 Diderot 的 *Encyclopedie* 中，引自 Archibald（1914）。

[189] 拉格朗日，1797 年。

[190] 关于格拉斯曼的生平及其研究，请参阅 Petsche（2006，德文版）所写的传记。O'Connnor 和 Robertson（2005）有一段更加简短，但却十分精彩的描述。

[191] 有关格拉斯曼线性代数的通俗讲解分析（说实话依然比较专业），请参阅 Fearnley-Sander（1979、1982）。

[192] 对于 *n* 维几何的分析，请参阅 Sommerville 的著作（1982）。

[193] 这段文字出现于 Ewald 的著作（1996）。

[194] 这段文字出现于 Ewald 的著作（1996）。

[195] 司蒂吉斯写给埃尔米特的第一封信的时间是 1882 年 11 月 8 日。这两位数学家之间的通信有 432 封之多。完整的通信情况请参阅 Hermite 的著作（1905），我在这里引用的是我本人的翻译内容。

[196] 关于这次演讲请参阅 O'Connnor 和 Robertson 的著作（2007）。

第 7 章

[197] 这个山村理发店的悖论标语在很多书上都有记载。例如，请参阅 Quine（1966）、Rescher（2001）和 Sorensen（2003）的著作。

[198] 罗素，1919 年。这是罗素对于逻辑的一个更加通俗的解释。

[199] 布劳威尔的直觉主义过程请参阅 van Stegt 的著作（1998）。Barrow（1998）对直觉主义的解释更加通俗一些。对于直觉主义和形式主义之间的争论请参阅 Hellman 的著作（2006）。

[200] 达米特补充道："单个的人无法与他不能被观察的交流者交流：如果单个的人与数学符号或某种人类研究出的公式联系在了一起，并且这种联系不依赖于他所使用的符号或公式，那么他将无法传达这些符号或公式的含义，因为他的观察者不明白这种联系的意思，也就不会明白它所代表的意义。"达米特，1978 年。

[201] 关于逻辑的引入的进一步讨论，请参阅 Bennett 的著作(2004)。Quine(1982)的分析更专业，但也出色。关于逻辑学历史的简短而精彩的分析，请参阅由 Czeslaw Lejewski 所著的 *Encyclopaedia Britannica* 第十五版。

[202] 关于德摩根的生平及其研究，请参阅 Ewald（1996）那简短而又透彻的描述。

[203] 布尔，1847 年。

[204] 关于布尔的生平，请参阅 MacHale（1985）所撰写的传记，其中对布尔的一生有非常完整全面的描述。

[205] 布尔，1854 年。

[206] 当提到对上帝存在的信仰时，布尔总结说："向前迈出的、虚弱的步伐，即使这是基于信仰的、非逻辑的，即使这种理解受到能力和知识的限制，那也要好过一种野心勃勃的企图，企图在自然宗教的基础上达到不切实际的确定性。"

[207] 弗雷格，1879 年。这本书是逻辑学历史上最重要的著作之一。

[208] 弗雷格，1879 年和 1903 年。

[209] 关于弗雷格的思想和他的形式主义体系请参阅 Resnik (1980)、Demopoulos 和 Clark（2005）、Zalta（2005）、Boolos（1995）的著作。关于数学逻辑的讨论，请参阅 DeLong 的著作（1970）。

[210] 弗雷格，1884 年。

[211] 关于罗素提出的悖论、它的适用范围，以及对这一悖论的补救，请参阅 Boolos（1999）、Clark（2002）、Sainsbury（1998）和 Irvine（2003）的著作。

[212] 怀特黑德和拉塞尔，1910 年。拉塞尔在 1919 年对本书进行了描述。

[213] 关于罗素和弗雷格二人观点和思想的异同，请参阅 Beaney 的著作（2003）。对于罗素的逻辑主义观点，请参阅 Shapiro (2000)、Godwyn 和 Irvine (2003) 的著作。

[214] Urquhart（2003）对此有精彩的分析。

[215] 大多数数学家的确不太认可罗素的类型理论。不过，类似的结构在计算机程序上却被发现有新的用途，请参阅 Mitchell 的著作（1990）。

[216] 关于策梅洛的贡献请参阅 Ewald 的著作（1996）。

[217] 策梅洛、弗兰克尔，以及逻辑学家 Thoralf Skolem 论文的翻译版本，请参阅 Heijenoort 的著作（1967）。关于策梅洛-弗兰克尔集合理论引入的相关背景情况，请参阅 Devlin 的著作（1993）。

[218] 关于这条公理的细节，请参阅 Moore 的著作（1982）。

[219] 康托想出了一种比较有限集合的基势的方法。特别是，他证明了实数组成的集合的基势并不比整数组成的集合基势更大。之后，康托系统阐述了连续统假设，该假设认为不存在一个基势在整数和实数集合之间的集合。1900年，大卫·希尔伯特提出了一系列著名的、未解的数学难题，'连续统假设是否为真'位于这一排行榜首位。关于连续统假设的相关细节性讨论，请参阅 Woodin 的著作（2001）。

[220] 科恩在 1966 年对他的研究有详细的描述。

[221] 关于希尔伯特过程，Sieg（1978）有很详细的描述。对于数学哲学存近年来的一些新发展，以及逻辑主义、形式主义、直觉主义之间的争论，Shapior（2000）进行了精彩的概括。

[222] 希尔伯特在 1922 年 9 月在 Leipzig 发表的这场演讲，这次演讲的内容请参阅 Ewald 的著作（1996）。

[223] 关于形式主义论，请参阅 Detlefsen 的著作（2005）。

[224] R. Monk（1990）曾为维特根斯坦写过一本非常精彩的传记。

[225] Waismann（1979）。

[226] 关于哥德尔最新的一本传记是由 Goldstein（2005）完成的。Dawon（1997）为哥德尔写过一本十分标准的传记。

[227] 关于哥德尔的定律、它们的意义，以及这些定律与数学其他分支的联系等，请参阅 Hofstadter（1979）、Nagel 和 Newamn（1959）、Franzen（2005）的著作，他们对上述问题都有非常精彩的分析。

[228] 哥德尔，1947 年。

[229] 关于哥德尔所有哲学观点的描述，以及他是如何把哲学思想与数学基础联系在一起的，请参阅 Wang 的著作（1996）。

[230] 摩根斯坦，1971 年。

[231] 很明显这里用一种非常通俗的文字大大简化了这一问题。事实上，在逻辑学领域，时至今日对它的探索仍在继续。典型的假设是把数学真理当做一种可知的先验性。请参阅 Wright（1997）和 Tennat（1977）的著作。

第8章

[232] 关于如何编组结，Ashley（1944）有一本非常有趣的书。

[233] 范德蒙德，1771年。关于纽结理论的历史请参阅 Przytycki（1992）的著作。Adams（1994）就纽结理论的诞生有非常生动的描写。Neuwirth（1979）、Peterson（1988）、Menasco 和 Rudolph（1995）的描述则更通俗一些。

[234] 关于托玛斯的研究请参阅 Sossinsky（2002）和 Atiyah（1990）的著作。

[235] 泰特，1898年；Sossinsky，2002年。O'Connor 和 Robertson（2003）用十分精彩的语言介绍了泰特的生平。

[236] Knott，1911年。

[237] 利特尔，1899年。

[238] 关于拓扑学，Messer 和 Straffin（2006）有一篇非常专业，但是仍然十分基础的介绍。

[239] 珀克，1974年。

[240] 亚里山大，1928年。

[241] 康威，1970年。

[242] 琼斯，1985年。

[243] 例如，数学家 Louis Kauffman 已经证明了琼斯多斯式和统计物理学有密切关系。关于纽结理论在物理学上的应用请参阅 Kauffman（2001），不过他的写作侧重于技术。

[244] 关于纽结理论与酶之间的联系请参阅 Summers（1995）。也可参考 Wasserman 和 Cozzarelli（2004）的著作。

[245] 关于弦论的具体内容，这一理论的成功之处与目前存在的一些缺陷等，请参阅 Greene（1999）、Randall（2005）、Krauss（2005）、Smolin（2006）的著作。如果想得到一些更专业的内容，请参阅 Zweibach（2004）的著作。

[246] 奥格瑞和瓦发，2000年。

[247] 威顿，1989年。

[248] 阿蒂亚，1989年。

[249] 开普纳等，2007年。

[250] 关于爱因斯坦的广义相对论和狭义相对论有众多参考资料。这里我只列举一些我经常翻阅的几本：Davies（2001）、Deutsch（1997）、Ferris（1997）、Gott（2001）、Green（2004）、Hawking 和 Penrose（1996）、Kaku（2004）、Penrose（2004）、Rees（1997）、Smlin（2001）。最近 Isaacson（2007）出

版了一本介绍爱因斯坦的生平及他的思想的书，内容十分精彩。此前关于爱因斯坦研究方面比较好的书有：Bodanis(2000)、Lightman(1993)、Overbye(2000)、Pais (1982) 的著作。爱因斯坦的原始论文，请参阅 Hawking (2007) 的著作。

[251] 迈克·克瑞莫等人，2006 年。

[252] Odom 等人，2006 年。

[253] 关于这一理论的详细情况请参阅史蒂文·温伯格（1993）。

第 9 章

[254] 戴维斯、赫什，1981 年。

[255] 哈代，1940 年。

[256] 凯斯纳和纽曼，1989 年。

[257] 关于数学自然性的通俗讨论请参阅 Barrow（1992）。Kline（1972）对这个问题有比较专业的分析，而且还把一些最主要的思想进行了综述。

[258] 关于本书所讨论的大多数主题，Barrow（1992）也有精彩的描述。

[259] 泰格马克，2007 年。

[260] 尚热、康奈斯，1995 年。

[261] 德汉尼，1997 年。

[262] 德汉尼，2006 年。

[263] 请参阅 Holden（2006）的著作。

[264] 尚热、康奈斯，1995 年。

[265] 莱考夫、努涅斯，2000 年。

[266] 请参阅 Ramachandran 和 Blakselee 的著作（1999）。

[267] 毕莱等人，2005 年；Klessinger 等人，2007 年。

[268] 阿蒂亚，1995 年。

[269] 关于黄金分割率的历史和这一比率的特征，请参阅李维（2002）和参阅 Herz-Fischler（1998）的著作。

[270] 关于这一思想的请参阅 Yehuda Rav（2000）在 Hersh 上的一篇文章。

[271] 怀特，1947 年。

[272] 请参阅霍克特（1960）的著作。

[273] 关于语言和大脑的讨论请参阅 Obler 和 Gjerlow（1999）的著作。

[274] 这种语言与数学之间的相似性，Sarrukai（2005）和阿蒂亚（1994）专门进

行了讨论。

[275] 乔姆斯基，1957 年。如果你想了解更多关于语言言方面的知识，请参阅 Aronoff 和 Rees-Miller（2001）的著作。Pinker（1994）对此有更加通俗和有趣的描述。

[276] 斯蒂芬·沃夫曼，2002 年。

[277] 泰格马克区分了 4 种截然不同的平行宇宙。在“第一层次”的宇宙，有相同的物理原理，但初始条件不同；在“第二层次”的宇宙，有相同的物理平衡，但是自然常数不同；“第三层次”的宇宙是指量子力学解释的“多种世界”；在“第四层次”，则有完全不同的数学结构。泰格马克，2004 年。

[278] 关于这个问题的详细讨论，请参阅 Vilekin（2006）的著作。

[279] 普特内姆，1975 年。

[280] 这里还有一些观点我没有在本书中讨论。例如 Steiner（2005）就认为维格纳并没有表明他所给出的“无理由的有效性”的例子与概念是数学这一事实无关。

[281] 格瑞斯，1988 年。关于数学与物理学之间关系的进一步讨论，请参阅瓦发的著作（2000）。

[282] 请参阅阿蒂亚的著作（1995）。

[283] 汉明，1980 年。

[284] 温伯格，1993 年。

[285] Borovik（2006）。

[286] 瑞斯金，1998 年。

[287] 哈希，2000 年。

[288] 开普勒本人的著作，在 1981 年和 1997 年进行了重印，它们可以帮助我们了解那段历史。请参阅 Caspar（1993）和 Gingerich（1973）所写的传记。

[289] 请参阅 Lecar 等人的著作（2001）。

[290] 关于数学功用的有趣讨论请参阅 Raymond 的著作（2005）。对于维格纳难题的深入分析请参阅 Wilczek 的著作（2006、2007）。

[291] 罗素，1912 年。